

N. GHIRCOIASIU
M. IAȘINCHI

FIȘE
DE

algebră

pentru
elevi și
absolvenți
de
licee

algebră

EDITURA DACIA

N. GHIRCOLAȘIU M. IASINSCHI

FIȘE DE ALGEBRĂ
pentru
elevi și absolvenți de licee

EDITURA DACIA
CLUJ-NAPOCA 1976

Coperta de Ioan Horvat Bugnariu

ARHIVA 30 3217

Arhiv

Arhiv de la Biblioteca la Ivela

Prefață

Exercițiile și problemele conținute în această carte fac parte dintr-un bogat material strîns în decursul timpului de către autori, în vederea pregătirii sau examinării elevilor sau studenților lor. Ele au fost selecționate în așa fel încît să existe cît mai puține suprapuneri cu alte culegeri de același fel, care astfel se pot utiliza în paralel. Greutatea medie a chestiunilor propuse este puțin mai ridicată, eliminîndu-se pe cît posibil exercițiile de rutină sau repetarea unor exerciții de tip apropiat. O parte dintre exerciții sînt originale și au fost întocmite în așa fel încît să aducă cît mai multe informații asupra capitolului la care se referă.

O primă parte a cărții parcurge întregul material teoretic de algebră necesar rezolvării exercițiilor și problemelor și el este expus în ordine logică, făcîndu-se abstracție de succesiunea în care este prezentat în învățămîntul mediu. În felul acesta cititorul poate să-și cristalizeze privirea de ansamblu asupra tuturor capitolelor de algebră și asupra altor capitole din matematici, utile în rezolvarea problemelor algebrice.

Atît în partea teoretică, cît și în exerciții, s-au introdus cîteva noțiuni și metode de rezolvare, care în momentul de față nu sînt incluse în programele de învățămînt mediu. Pentru unele dintre ele s-au făcut simple referiri, pentru altele s-au introdus și exerciții dintre care unele au fost rezolvate complet, pentru a constitui modele de lucru. Ele fac parte fie din capitolele de analiză numerică strict necesare programării calculatoarelor electronice, fie sînt noțiuni curent utilizate în învățămîntul tehnic superior, deci sînt susceptibile de a fi introduse pe viitor în învățămîntul mediu.

Prin cartea de față, autorii speră să aducă aportul lor în pregătirea matematică a tineretului nostru și în dezvoltarea învățămîntului. Ei mulțumesc anticipat pentru orice observații și sugestii ce li se vor face.

Cluj 1a 12 dec. 1975

N. GHIRCOIAȘIU
M. IASINSCHI

TEORIE

Cap. I. Expresii matematice

1. DEFINIȚII

Se numește *expresie matematică* o mulțime de elemente (care în particular pot fi numere sau litere) legate între ele prin simboluri ce reprezintă operații matematice, sau care arată ordinea în care se efectuează acestea (de exemplu, parantezele).

Literele care apar în expresii pot fi de două feluri: unele pot lua diferite valori numerice, caz în care se numesc *variabile*, sau *argumente* și se notează de obicei cu litere de la sfârșitul alfabetului $x, y, z, \dots$, altele pot lua numai o anumită valoare care nu trebuie să fie neapărat precizată, caz în care acestea se numesc *parametri* și se notează cu litere de la începutul alfabetului $a, b, c, \dots$ *.

Prin precizarea operațiilor admise în expresii, se disting diferite cazuri particulare. Astfel dacă operațiile sînt adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere cu exponent întreg și extragerea rădăcinii de ordin întreg, avem o *expresie algebrică*. Celelalte expresii se numesc *transcendente*. O expresie algebrică se zice *rațională* (sau *fracție rațională*), dacă nu conține radicali aplicați asupra variabilelor și *iratională* în caz contrar. Expresia rațională se numește *întreagă*, sau *polinom*, dacă ea nu are împărțiri între expresii ce conțin variabile. În cazul cînd polinomul nu are operații de adunare sau scădere, el se numește *monom*. Suma sau diferența a două monoame se numește *binom*, iar suma sau diferența a trei monoame se numește *trinom*.

2. EGALITĂȚI ȘI INEGALITĂȚI

Dacă două expresii matematice A și B au aceleași valori pentru orice valori date variabilelor, atunci se zice că ele sînt identic egale, sau că avem *identitatea* $A \equiv B$.

* Separarea aceasta dintre variabile și parametri, dacă nu rezultă din problema care se discută, trebuie neapărat precizată. Altfel toate literele sînt socotite ca variabile.

11.2.3
Dacă identitatea precedentă are loc numai dacă variabilele satisfac una sau mai multe relații, se zice că avem o *identitate condiționată*.

Dacă valorile expresiilor A și B sînt egale numai pentru anumite valori date variabilelor, avem *ecuația* $A = B$.

Atît identitățile cît și ecuațiile pot fi algebrice, sau transcendente.

Dacă pentru orice valori date variabilelor, valoarea expresiei A este mai mică (mai mică sau egală, mai mare, mai mare sau egală) decît valoarea expresiei B , avem *inegalitatea* $A < B$ (respectiv $A \leq B$, $A > B$, $A \geq B$). În cazul cînd relațiile precedente au loc numai pentru anumite valori ale variabilelor, avem o *inecuație* de unul din cele patru tipuri de mai sus. Cele mai importante proprietăți ale inegalităților sînt următoarele:

— din $A > B$, rezultă $mA > mB$, dacă $m > 0$ și $mA < mB$, dacă $m < 0$,

— dacă $A > B$, rezultă $B < A$,

— din $A > B$ și $B > C$, rezultă $A > C$,

— din $A > B$, rezultă $A + C > B + C$, pentru orice C ,

— din $A > B$ și $C < D$, rezultă $A - C > B - D$,

— dacă $A > B$, $C > D$ și A, D pozitivi, rezultă $AC > BD$.

Observăm că dacă $A > B$ și $C > D$, oricare dintre diferențele $A - C$ și $B - D$ poate fi cea mai mare.

Menționăm că în verificarea identităților și inegalităților, ca și în rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor, indiferent de natura lor, în afara metodelor algebrice se utilizează deseori și metode din analiza matematică.

3. MONOAME

Forma generală a unui monom este

$$Ax^{\alpha}y^{\beta} \dots z^{\lambda},$$

unde $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sînt numere întregi nenegative, iar A este un număr, numit coeficient al monomului. Suma $\alpha + \beta + \dots + \lambda$ se numește *gradul monomului*.

Cele mai simple monoame sînt de forma x^{α} . Operațiile ce se fac asupra acestor monoame sînt definite prin formulele

$$x^{\alpha}x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}, \quad \frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = x^{\alpha-\beta}, \quad (x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta}, \quad \sqrt[\beta]{x^{\alpha}} = x^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

și numai prima și a treia dau în general tot monoame. Exponentii rezultați pot fi nuli, negativi sau fracționari.

Două monoame care au aceeași parte literală (aceleași variabile ridicate la aceeași puteri) se numesc asemenea.

Suma, sau diferența, a două monoame asemenea are aceeași parte literală, iar coeficientul este suma, sau diferența coeficienților monoamelor. Produsul a două monoame este tot un monom obținut înmulțind atît coeficienții cît și puterile corespunzătoare ale variabilelor. Puterea întreagă și nenegativă a unui monom este tot un monom, care se obține ridicînd fiecare factor la acea putere. Analog se obține cîtul a două monoame și rădăcina de un anumit ordin dintr-un monom, dar rezultatul acestor operații este în general o fracție rațională, respectiv o expresie irațională.

4. POLINOAME

4.1. POLINOAME CU O SINGURĂ VARIABILĂ

4.1.1. Operații

Forma generală a unui polinom cu o singură variabilă x este

$$(1) \quad P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

unde coeficienții $a_0, a_1, \dots, a_n$ sînt numere aparținînd unui corp (sau unei structuri mai generale). Numărul n se numește **gradul polinomului** și el este cel mai mare dintre gradele monoamelor din care este format polinomul.

Polinomul (1) se zice *ordonat după puterile descrescătoare ale variabilei*, pe scurt, *ordonat descrescător*. Un polinom poate fi *ordonat și după puterile crescătoare ale variabilei*, pe scurt, *ordonat crescător*.

Se numește valoare numerică a polinomului $P(x)$, pentru valoarea α a variabilei, numărul

$$P(\alpha) = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n.$$

Uneori trebuie să se calculeze valoarea unui polinom pentru una dintre rădăcinile unei ecuații de gradul doi $x^2 + bx + c = 0$. În loc de a rezolva această ecuație și a ridica una dintre rădăcini la toate puterile ce apar în polinom, se caută să se exprime aceste puteri în funcție de puterea întâia a rădăcinii. Astfel avem

$$x^2 = -bx - c, \quad x^3 = -bx^2 - cx = (b^2 - c)x + bc \text{ etc}$$

și acestea se înlocuiesc în polinom. Calculul valorii numerice este acum simplu.

Dacă valoarea numerică $P(\alpha)$ a polinomului $P(x)$ este nulă, se zice că α este un zero, sau o rădăcină, a polinomului $P(x)$.

Găsirea rădăcinilor unui polinom va fi obiectul unui alt capitol.

Un polinom se zice identic nul (notație $P(x) \equiv 0$), dacă el este nul pentru orice valoare dată necunoscutei. Condiția necesară și suficientă ca un polinom să fie identic nul este ca toți coeficienții lui să fie nuli. Două polinoame se zic identic egale, dacă coeficienții acelorași puteri ale variabilei sînt respectiv egali.

Pe aceste noțiuni se bazează metoda coeficienților nedeterminați. Ea constă în următoarele: dacă în rezultatul unor operații cu polinoame și alte funcții se știe că trebuie să apară un polinom de un anumit grad, se caută să se determine coeficienții acestui polinom, presupuși inițial nedeterminați, dintr-o identitate între două polinoame.

Exemplu. În continuare se vor întîlni multe exemple de aplicare a acestei metode pentru cazul unor operații efectuate între polinoame, de aceea exemplul ce urmează se referă la o operație între o exponențială și un polinom. Pentru a găsi primitiva funcției $x^2 e^x$, știind că ea este de aceeași formă, scriem

$$\int x^2 e^x dx = e^x(ax^2 + bx + c) + d.$$

Derivînd se ajunge la identitatea

$$x^2 \equiv ax^2 + (b + 2a)x + b + c,$$

de unde $a = 1$, $b = -2$ și $c = 2$, deci

$$\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + d.$$

Un polinom $P(x)$ verifică o inecuație de forma

$$P(x) > 0, \text{ pentru } x \in M,$$

dacă valorile lui numerice, pentru orice $x \in M$, sînt pozitive. Analog se definesc inecuațiile în care semnul $>$ este înlocuit cu $<$, sau cu $\geq$, $\leq$.

Suma a două polinoame se efectuează adunînd termenii asemenea. Produsul a două polinoame este egal cu suma produselor obținute înmulțind fiecare monom dintr-un polinom cu fiecare monom din celălalt polinom. Cîtul a două polinoame este în general o expresie algebrică rațională (fracție rațională). Presupunînd polinoamele ordonate descrescător, prin împărțirea unui polinom $P_1(x)$, de grad n ,

$$\frac{P_1}{P_2} = Qx + R$$

numit *deîmpărțit*, cu un polinom $P_2(x)$, de grad $m \leq n$, numit *împărțitor*, se înțelege găsirea unui polinom $Q(x)$, de grad $n - m$, numit *cît* și a unui polinom $R(x)$, de grad $r < m$, numit *rest*, astfel încît să avem identitatea

$$(2) \quad P_1(x) \equiv P_2(x)Q(x) + R(x).$$

În cazul cînd restul este identic nul, împărțirea se zice că *se face exact*.

Determinarea coeficienților cîtului și restului se poate face fie prin metoda coeficienților nedeterminați, fie prin *operația de împărțire a polinoamelor*, care constă în determinarea succesivă a termenilor cîtului și a unor resturi parțiale, pînă se ajunge la un rest parțial de grad mai mic decît împărțitorul. Primul termen al cîtului se obține împărțind primii termeni ai deîmpărțitului și împărțitorului. Diferența dintre deîmpărțit și produsul împărțitorului cu primul termen al cîtului este primul rest parțial. Al doilea termen al cîtului și al doilea rest parțial se obține după aceeași regulă, luînd în locul deîmpărțitului primul rest parțial, ș.a.m.d.

Observații. 1° În cazul cînd împărțirea nu se face exact, operația descrisă mai sus se poate *extinde* scoțînd la cît un număr de puteri negative, la fel cum la împărțirea a două numere întregi se pot scoate la cît cifre zecimale. În acest caz cîtul și restul nu mai sînt polinoame, ci fracții raționale, care verifică o identitate analoagă cu (2).

Exemplu.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 & x^2 - x - 1 \\ - 2x^3 + 3x^2 - x + 1 & x^2 - 2x + 1 - 2x^{-1} - 2x^{-3} \\ \hline & x^2 - 3x + 1 \\ & - 2x + 2 \\ \hline & - 2x^{-1} \\ & - 2x^{-2} - 2x^{-3} \end{array}$$

Avem identitățile

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 \equiv (x^2 - x - 1)(x^2 - 2x + 1) - 2x + 2$$

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1 \equiv (x^2 - x - 1)(x^2 - 2x + 1 - 2x^{-1} - 2x^{-3}) - 2x^{-2} - 2x^{-3}.$$

2° Împărțirea polinoamelor se efectuează după aceeași regulă și în cazul cînd *polinoamele sînt ordonate crescător*. În cazul cînd împăr-

țirea se face exact, este indiferent care procedeu se utilizează. Împărțirea se oprește, după dorință, la un anumit termen al cîtului și se poate scrie o identitate a împărțirii, evident fără a mai avea condițiile menționate mai sus pentru gradul cîtului și al restului. Procedeu se utilizează pentru a obține termeni din dezvoltarea în serie de puteri ale variabilei pentru cîtul celor două polinoame.

Exemplu. Pentru aceleași polinoame din exemplul precedent avem

$$\begin{array}{r|l}
 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + x^4 & -1 - x + x^2 \\
 \hline
 -2x + 3x^2 - 3x^3 + x^4 & -1 + 2x - 5x^2 + 10x^3 - 16x^4 \\
 \hline
 5x^2 - 5x^3 + x^4 & \\
 -10x^3 + 6x^4 & \\
 \hline
 16x^4 - 10x^5 & \\
 -26x^5 + 16x^6 &
 \end{array}$$

Identitatea împărțirii este

$$1 - x + 2x^2 - 3x^3 + x^4 \equiv (-1 - x + x^2)(-1 + 2x - 5x^2 + 10x^3 - 16x^4) - 26x^5 + 16x^6.$$

4.1.2. Dezvoltarea unui polinom după puterile altui polinom

Este util uneori de a dezvolta un polinom $P(x)$ după puterile unui alt polinom $Q(x)$, conform identității

$$P(x) \equiv Q^m(x)R_m(x) + Q^{m-1}(x)R_{m-1}(x) + \dots + R_0(x),$$

unde gradele polinoamelor $R_0, R_1, \dots, R_m$ sînt mai mici decît gradul polinomului $Q(x)$.

Această dezvoltare se face cu ajutorul șirului de împărțiri succesive

$$P(x) \equiv Q(x)P_1(x) + R_0(x)$$

$$P_1(x) \equiv Q(x)P_2(x) + R_1(x)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$P_{m-1}(x) \equiv Q(x)P_m(x) + R_{m-1}(x), \quad P_m(x) = R_m(x).$$

Se elimină apoi succesiv toate cîturile $P_1(x), \dots, P_{m-1}(x)$. Astfel, de exemplu, avem

$$\begin{aligned}
 x^7 + x + 1 &\equiv (x^2 - 2x - 1)^3(x + 6) + (x^2 - 2x - 1)^2(27x + 50) + \\
 &+ (x^2 - 2x - 1)(131x + 114) + 170x + 71.
 \end{aligned}$$

În cazul particular cînd $Q(x) = x - a$, avem dezvoltarea polinomului $P(x)$ după puterile lui $x - a$, dezvoltare care se numește *formula lui Taylor* a polinomului $P(x)$.

Resturile $R_0, R_1, \dots, R_m$ sînt în acest caz constante și se poate arăta că

$$R_0 = P(a), R_1 = P'(a), \dots, R_m = \frac{P^{(m)}(a)}{m!},$$

unde $P^{(k)}(x)$ este derivata de ordinul k a lui $P(x)$.

Cu aceste notații, formula lui Taylor se scrie

$$P(x) = P(a) + \frac{x-a}{1} P'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} P^{(n)}(a).$$

(Același rezultat se poate obține dacă în locul șirului de împărțiri facem în polinom schimbarea $u = x - a$ și dacă ordonăm după puterile lui u).

Ca *e x e m p l u* avem

$$x^7 + x + 1 \equiv 3 + 8(x-1) + 21(x-1)^2 + 35(x-1)^3 + 35(x-1)^4 + 21(x-1)^5 + 7(x-1)^6 + (x-1)^7.$$

4.1.3. Schema lui Horner

Schema lui Horner permite ca, pe baza unui tabel, să se calculeze valorile unui polinom $P(x)$ și ale derivatelor lui, motiv pentru care este deosebit de importantă în problemele de calcul. Baza teoretică a metodei constă în identitatea

$$P(x) \equiv (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha),$$

care spune că restul împărțirii polinomului $P(x)$ prin $x - \alpha$ este valoarea polinomului pentru $x = \alpha$.

Fiind dat polinomul

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

se introduc polinoamele (numite polinoame *Laguerre*)

$$\begin{aligned} P_0(x) &= a_0 &= a_0 \\ P_1(x) &= xP_0(x) + a_1 &= a_0 x + a_1 \\ P_2(x) &= xP_1(x) + a_2 &= a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \\ &\dots &\dots \\ P_{n-1}(x) &= xP_{n-2}(x) + a_{n-1} &= a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} \\ P_n(x) &= xP_{n-1}(x) + a_n &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = P(x) \end{aligned}$$

legate între ele prin *relația de recurență*

$$P_k(x) = xP_{k-1}(x) + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

valabilă pentru orice x .

Pentru a obține valoarea $P(\alpha) = P_n(\alpha)$, din formulele precedente se calculează, din aproape în aproape, valorile $P_0(\alpha), P_1(\alpha), \dots, P_{n-1}(\alpha)$, cu ajutorul *schemei lui Horner*

α	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
		αP_0	αP_1	$\dots$	αP_{n-2}	αP_{n-1}
	$P_0 = a_0 \quad P_1(\alpha) \quad P_2(\alpha) \quad \dots \quad P_{n-1}(\alpha) \quad P_n(\alpha) = P(\alpha)$					

în care linia a doua de obicei se suprimă. Operațiile făcute în schema lui Horner sînt acelea din împărțirea polinomului $P(x)$ cu $x - \alpha$ și avem

$$(3) \quad P(x) \equiv [P_0(\alpha)x^{n-1} + P_1(\alpha)x^{n-2} + \dots + P_{n-1}(\alpha)](x - \alpha) + P_n(\alpha),$$

deci în ultima linie din schema lui Horner apar în ordine coeficienții cîtului și restul acestei împărțiri.

Repetînd schema lui Horner pentru numerele

$$P_0(\alpha), P_1(\alpha), \dots, P_n(\alpha),$$

găsite mai sus, aflăm numerele

$$P'_1(\alpha), P'_2(\alpha), \dots, P'_n(\alpha) = P'(\alpha)$$

și apoi succesiv

$$\frac{1}{2!} P''_2(\alpha), \frac{1}{2!} P''_3(\alpha), \dots, \frac{1}{2!} P''_n(\alpha) = \frac{1}{2!} P''(\alpha)$$

$$\frac{1}{3!} P'''_3(\alpha), \frac{1}{3!} P'''_4(\alpha), \dots, \frac{1}{3!} P'''_n(\alpha) = \frac{1}{3!} P'''(\alpha)$$

...

...

...

...

$$\frac{1}{(n-1)!} P^{(n-1)}_{n-1}(\alpha), \frac{1}{(n-1)!} P^{(n-1)}_n(\alpha) = \frac{1}{(n-1)!} P^{(n-1)}(\alpha)$$

$$\frac{1}{n!} P^{(n)}_n(\alpha) = \frac{1}{n!} P^{(n)}(\alpha).$$

Se obțin în felul acesta valorile pentru $x = \alpha$ ale derivatelor succesive ale polinomului $P(x)$ și rezultă

dezvoltarea Taylor a polinomului $P(x + \alpha)$ după puterile lui x ,

$$P(x + \alpha) = P(\alpha) + x \frac{P'(\alpha)}{1!} + \dots + x^n \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}.$$

Exemplu. Pornind de la polinomul $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x - 7$, să găsim polinomul $P(x + 2)$. Avem

2	3	-2	1	4	-7
	3	4	9	22	37 = $P(2)$
	3	10	29	80 = $\frac{P'(2)}{1!}$	
	3	16	61 = $\frac{P''(2)}{2!}$		
	3	22 = $\frac{P'''(2)}{3!}$			
	3 = $\frac{P^{IV}(2)}{4!}$				

deci $P(x + 2) = 37 + 80x + 61x^2 + 22x^3 + 3x^4$.

Observație. Pentru anumite probleme (ca de exemplu găsirea rădăcinilor întregi și fracționare ale unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi), calculele din schema lui Horner se încep de la termenul liber. Aceasta corespunde împărțirii a două polinoame după puterile crescătoare ale variabilei. Cîțul și restul este același ca și la împărțirea după puterile descrescătoare *numai dacă* împărțirea se face exact, caz în care restul b_0 este nul. Schema împărțirii cu $\alpha - x$, este

$a_0 \dots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n	α
$b_1 \dots$	b_{n-1}	b_n		
$b_0 \dots$	$b_{n-2} = \frac{a_{n-2} + b_{n-1}}{\alpha}$	$b_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_n}{\alpha}$	$b_n = \frac{a_n}{\alpha}$	

linia intermediară putînd fi eliminată.

Exemplu. Polinomul $x^4 - 9x^2 + 4x + 12$ se împarte cu $x+3$, dar nu cu $x+2$ căci,

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 0 & -9 & 4 & 12 & \\ \hline 0 & -1 & 3 & 0 & -4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 0 & -9 & 4 & 12 & \\ \hline \frac{1}{2} & -2 & 4 & 1 & -6 & \end{array}$$

Generalizarea schemei lui Horner.

Coeficienții cîtului și restului împărțirii polinomului $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ cu trinomialul $x^2 + px + q$, sînt dați de schema

$x^2 + px + q$	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
		$-pb_0$	$-pb_1$	$\dots$	$-pb_{n-3}$	$-pb_{n-2}$	
			$-qb_0$	$\dots$	$-qb_{n-4}$	$-qb_{n-3}$	$-qb_{n-2}$
	b_0	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n
	coeficienții cîtului				coeficienții restului		

deci avem

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \equiv (x^2 + px + q)(b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \dots + b_{n-2}) + b_{n-1}x + b_n.$$

Relația de recurență pe care se bazează schema, este

$$\begin{aligned} b_k &= a_k - pb_{k-1} - qb_{k-2}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ b_n &= a_n - qb_{n-2}, \quad b_{-1} = b_{-2} = 0. \end{aligned}$$

4.1.4. Divizori și multipli

Orice polinom $D(x)$ care împarte exact un alt polinom $P(x)$ se numește *divizor* al acestuia și putem scrie

$$P(x) \equiv D(x)Q(x).$$

Se observă ușor că dacă $D(x)$ este un divizor al lui $P(x)$, atunci și $kD(x)$ este divizor, unde k este o constantă. Asemenea divizori însă nu sînt socotiți ca distincți. Cum orice polinom se divide cu o constantă nenulă și cu el însuși, acești divizori poartă denumirea de *divizori improprii*. Ceilalți divizori se numesc *divizori proprii*.

Cunoașterea unuia sau mai multor divizori proprii, permite o descompunere în factori a polinomului.

E x e m p l u. Polinomul $x^4 - 1$ are divizorii proprii $x + 1$, $x - 1$, $x^2 + 1$, $x^2 - 1$, $(x + 1)(x^2 + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$, $(x - 1)(x^2 + 1) = x^3 - x^2 + x - 1$, deci avem descompunerile în factori ale polinomului $x^4 - 1$

$$(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1), (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1),$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1), (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1).$$

Găsirea divizorilor proprii ai unui polinom se poate face prin găsirea factorilor comuni ai monoamelor, prin utilizarea formulelor de calcul prescurtat și prin grupări de termeni și scoatere repetată de factori comuni, însă găsirea tuturor divizorilor proprii este strâns legată de găsirea rădăcinilor polinomului (Cap. IV). Astfel dacă $x_1, x_2, \dots, x_k$ sînt rădăcinile polinomului $P(x)$, multiple, respectiv de ordinele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, polinomul se poate scrie

$$P(x) = A(x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_k)^{\alpha_k}.$$

Invers, dacă pentru $x = x_j$, avem $P(x_j) = 0$, rezultă că polinomul $P(x)$ are divizorul $x - x_j$ și el se poate scrie $P(x) \equiv (x - x_j) Q(x)$. În cazul cînd rădăcina este multiplă de ordinul m , avem $P(x) \equiv (x - x_j)^m Q_1(x)$ și $Q_1(x_j) \neq 0$.

Amintim că se numesc *divizori primi*, sau *factori primi*, acei divizori care la rîndul lor nu au divizori proprii. Această noțiune trebuie însă referită la structura algebrică în care se lucrează. Astfel, în corpul numerelor reale avem descompunerea în factori primi

$$x^4 - 1 \equiv (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1),$$

iar în corpul numerelor complexe, descompunerea este

$$x^4 - 1 \equiv (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i).$$

Un polinom $M(x)$ se numește *multiplu* al polinomului $P(x)$, dacă $P(x)$ este un divizor al lui $M(x)$, deci

$$M(x) \equiv P(x) N(x).$$

Un polinom $D(x)$ se numește *divizor comun* al polinoamelor $P_1(x)$ și $P_2(x)$, dacă el divide pe fiecare dintre cele două polinoame, deci dacă avem $P_1(x) \equiv D(x) Q_1(x)$, $P_2(x) \equiv D(x) Q_2(x)$. Două polinoame care nu au nici un divizor propriu comun, se numesc *prime* între ele.

Avem proprietățile :

Dacă polinomul $D(x)$ este divizor comun al polinoamelor $P_1(x)$ și $P_2(x)$, el este divizor și al sumei $P_1(x) + P_2(x)S(x)$, oricare ar fi polinomul $S(x)$.

Dacă polinomul $D(x)$ este divizor al produsului polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$ și este prim cu $P(x)$, atunci el este divizor al lui $Q(x)$.

Dacă polinomul $D(x)$ este prim cu două polinoame, el este prim și cu produsul lor.

Divizorul comun de grad maxim a două polinoame se numește cel mai mare divizor comun, prescurtat c.m.m.d.c. Rezultă că orice divizor comun a două polinoame divide pe c.m.m.d.c. al lor.

Găsirea c.m.m.d.c. a două polinoame $P_1(x)$ și $P_2(x)$ este mult ușurată de *algoritmul lui Euclid*, care constă în următorul șir de împărțiri

$$P_1(x) \equiv P_2(x) Q_1(x) + R_1(x)$$

$$P_2(x) \equiv R_1(x) Q_2(x) + R_2(x)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$R_k(x) \equiv R_{k+1}(x) Q_{k+2}(x) + R_{k+2}(x).$$

Algoritmul se oprește atunci când se ajunge la un rest de gradul zero, deci la o constantă. Dacă acest rest este diferit de zero, polinoamele date sînt prime între ele, în caz contrar penultimul rest este cel mai mare divizor comun căutat.

Observații. 1° Cîturile a două polinoame prin c.m.m.d.c. al lor sînt prime între ele.

2° În decursul operațiilor de împărțire, de exemplu pentru evitarea coeficienților fracționari, putem înmulți sau împărți polinoamele date, sau resturile parțiale, cu factori constanți, divizorii comuni rămînînd neschimbați. Se schimbă însă cîturile împărțirilor, iar resturile se înmulțesc cu factori constanți.

3° Oricare dintre resturile din algoritmul lui Euclid se poate scrie sub forma

$$R_k(x) \equiv P_1(x) B_k(x) + P_2(x) A_k(x),$$

unde gradele polinoamelor $A_k(x)$ și $B_k(x)$ sînt respectiv mai mici decît gradele polinoamelor $P_1(x)$ și $P_2(x)$. Scriînd această identitate pentru ultimul rest rezultă :

condiția necesară și suficientă ca două polinoame $P_1(x)$ și $P_2(x)$ să aibă un divizor comun este

$$P_1(x) B(x) + P_2(x) A(x) \equiv 0,$$

iar ca să fie prime între ele este

$$P_1(x) B(x) + P_2(x) A(x) \equiv 1,$$

unde polinoamele $A(x)$ și $B(x)$ au gradele respectiv mai mici decât $P_1(x)$ și $P_2(x)$. În primul caz drept polinoame $A(x)$ și $B(x)$ se iau cîturile polinoamelor prin c.m.m.d.c. al lor, unul dintre ele fiind înmulțit eventual cu o constantă. În al doilea caz, se împarte ultima identitate din algoritmul lui Euclid cu constanta R_{k+2} și apoi, ținînd seama de celelalte identități, se elimină succesiv toate resturile.

4° Găsirea c.m.m.d.c. a două polinoame este mult ușurată dacă se cunoaște o descompunere în factori a celor două polinoame. Factorii comuni din cele două dezvoltări intră în c.m.m.d.c., iar ceilalți trebuie examinați dacă mai au sau nu divizori comuni.

5° Găsirea c.m.m.d.c. a mai mult de două polinoame $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_k(x)$ se face căutînd c.m.m.d.c. $D_1(x)$ între primele două polinoame, apoi c.m.m.d.c. $D_2(x)$ între $D_1(x)$ și $P_3(x)$ etc.

Exemplu. Pentru găsirea c.m.m.d.c. al polinoamelor

$$P_1(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1, \quad P_2(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$$

calculul se organizează în felul următor

	1	$x+5$	$2x+3$
$x^4+2x^3+3x^2+2x+1$	x^4	$-2x^2-3x-2$	$2x^3+5x^2+5x+3$
$2x^3+5x^2+5x+3$	$2x^4$	$-4x^2-6x-4$	$3x^2+3x+3$
	$-5x^3-9x^2-9x-4$		
	$10x^3+18x^2+18x+8$		
	$-7x^2-7x-7$		
	x^2+x+1		

C.m.m.d.c. este $x^2 + x + 1$ și avem identitatea

$$(x^2 - x - 2) P_1(x) - (x^2 + x + 1) P_2(x) \equiv 0.$$

Cîturile polinoamelor date prin c.m.m.d.c. sînt respectiv $x^2 + x + 1$ și $x^2 - x - 2$, care sînt prime între ele, căci

	1	$\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$
$x^2 + x + 1$	$x^2 - x - 2$	$2x + 3$
$2x + 3$	$-\frac{5}{2}x - 2$	
	$\frac{7}{4}$	

Din identitățile

$$x^2 + x + 1 \equiv (x^2 - x - 2)(1) + 2x + 3,$$

$$x^2 - x - 2 \equiv (2x + 3) \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \right) + \frac{7}{4},$$

deducem

$$\frac{7}{4} \equiv (x^2 - x - 2) \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) - (x^2 + x + 1) \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \right)$$

$$1 \equiv (x^2 - x - 2) \left(\frac{2}{7}x - \frac{1}{7} \right) - (x^2 + x + 1) \left(\frac{2}{7}x - \frac{5}{7} \right).$$

Fiind date două polinoame $P_1(x)$ și $P_2(x)$, prin *cel mai mic multiplu comun* $M(x)$ al lor, pe scurt c.m.m.m.c., se înțelege un polinom de grad cel mai mic, care să fie simultan multiplu al celor două polinoame. Notînd cu $D(x)$ c.m.m.d.c. al celor două polinoame, avem

$$M(x) = \frac{P_1(x) P_2(x)}{D(x)}.$$

Găsirea c.m.m.m.c. este mult ușurată dacă polinoamele sînt descompuse în factori. Astfel dacă $P_1(x) \equiv D(x)Q_1(x)$ și $P_2(x) \equiv D(x)Q_2(x)$, unde $Q_1(x)$ și $Q_2(x)$ sînt prime între ele, avem $M(x) \equiv D(x)Q_1(x)Q_2(x)$.

Găsirea c.m.m.m.c. al polinoamelor $P_1(x), P_2(x), \dots, P_k(x)$ se face găsind c.m.m.m.c. $M_1(x)$ al primelor două polinoame, pe urmă c.m.m.m.c. $M_2(x)$ al lui $M_1(x)$ și $P_3(x)$ etc.

Exemplu. C.m.m.m.c. al polinoamelor din exemplul precedent este $x^6 + x^5 - x^4 - 5x^3 - 7x^2 - 5x - 2$.

4.1.5. Polinomul de interpolare Lagrange

Cunoscînd valorile $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_{n+1} = f(x_{n+1})$, ale funcției $f(x)$ pentru „nodurile” distincte $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, se cere să se afle un polinom de gradul n ale cărui valori să coincidă cu valorile funcției în toate cele $n + 1$ noduri. Răspunsul este dat de *polinomul de interpolare Lagrange*

$$\begin{aligned}
 L_n(x) = & \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{n+1})}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_{n+1})} y_1 + \\
 & + \frac{(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_{n+1})}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_{n+1})} y_2 + \dots + \\
 & + \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2) \dots (x_{n+1} - x_n)} y_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Denumirea de polinom de interpolare, provine din aceea că el permite găsirea cu aproximație a valorilor funcției $f(x)$ pentru valori diferite de $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Din punct de vedere geometric, parabola de gradul n , $y = L_n(x)$, trece prin punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $\dots$, $M_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ prin care trece și curba de ecuație $y = f(x)$. În particular, pentru $n = 1$, se obține dreapta de interpolare

$$y = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2$$

sau

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1),$$

adică dreapta care trece prin două puncte date.

4.2. POLINOAME CU MAI MULTE VARIABLE

Forma generală a unui monom de variabile $x, y, \dots, z$ este $Ax^\alpha y^\beta \dots z^\lambda$, unde A este o constantă, iar $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sînt întregi nenegativi. Numărul $\alpha + \beta + \dots + \lambda$ se numește gradul monomului. Un polinom în aceleași variabile este o sumă de monoame, gradul lui este cel mai mare dintre gradele monoamelor. Un polinom se zice *omogen*, dacă toate monoamele lui au același grad.

Pentru polinoamele omogene se utilizează și denumirea de *forme*. Astfel avem *forme liniare* (de gradul întâi) și *forme pătratice* (de gradul doi).

Un polinom omogen de gradul n satisface identitatea

$$P(tx, ty, \dots, tz) \equiv t^n P(x, y, \dots, z),$$

n fiind gradul de omogenitate. Un polinom se zice *simetric*, dacă el nu se schimbă pentru orice permutare a variabilelor.

Polinoamele de mai multe variabile se pot ordona fie lexical, deci după puterile descrescătoare ale unei variabile, coeficienții acesteia fiind polinoame de celelalte variabile, fie după gradul monoamelor, deci descompunând polinomul într-o sumă de polinoame omogene. Prima dintre aceste ordonări este importantă pentru descompunerea în factori, căci în acest scop se pot utiliza rezultatele de la polinoamele cu o singură variabilă. Astfel, dacă polinomul $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$ este nul pentru $x_1 = f(x_2, \dots, x_k)$, rezultă că $x_1 - f(x_2, \dots, x_k)$ este un divizor al polinomului, deci putem scrie

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv (x_1 - f(x_2, \dots, x_k))Q(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Aceeași ordonare este utilă și în efectuarea operațiilor, în special a celei de împărțire, care se efectuează analog ca și la polinoamele cu o singură variabilă.

Un polinom cu mai multe variabile este *identic nul*, dacă este nul pentru orice valori date variabilelor. Rezultă că un polinom identic nul are toți coeficienții nuli și că două polinoame sînt identic egale cînd coeficienții termenilor asemenea din cele două polinoame sînt egali.

În operațiile cu polinoame sînt utile *formulele de înmulțire prescurtată*, sau de *calcul prescurtat*. Ele sînt identități în mai multe variabile. Cele mai des utilizate sînt următoarele

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + y^{n-1}), \text{ pentru orice } n$$

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}), \text{ pentru orice } n \text{ impar}$$

$$x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} - y^{n-1}), \text{ pentru orice } n \text{ par}$$

$$(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \dots + C_n^n y^n \text{ (formula binomului)}$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) -$$

$$- (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2 = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^n (x_iy_k - x_ky_i)^2 \quad (\text{Lagrange}).$$

5. FRAȚII RAȚIONALE

O fracție rațională se poate scrie întotdeauna ca un cît de două polinoame. Frația rațională nu se schimbă prin *amplificarea* sau *simplificarea* ei, deci prin înmulțirea, respectiv împărțirea numărătorului și numitorului fracției cu același factor. Pentru simplificarea unei fracții, în prealabil se descompune în factori primi atât numărătorul cît și numitorul ei.

Adunarea și scăderea fracțiilor raționale se poate face numai dacă ele au același numitor. Aducerea la numitor comun se face căutînd c.m.m.m.c. al numitorilor și amplificînd corespunzător fracțiile astfel ca ele să aibă același numitor. Înmulțirea și împărțirea fracțiilor se face după aceleași reguli ca și la fracțiile numerice.

O problemă importantă, în special pentru calculul integral, este *descompunerea fracțiilor raționale*, cu o singură variabilă, în *fracții simple*.

Fracțiile cu care se lucrează trebuie să aibă gradul numărătorului mai mic decît gradul numitorului. În caz contrar se scoate partea întreagă, care se lasă temporar deoparte. În continuare, presupunînd că fracția are coeficienți reali, numitorul trebuie descompus în factori de gradul întâi pentru rădăcinile reale și factori de gradul doi pentru rădăcinile complex conjugate, fiecare asemenea factor fiind ridicat la o putere egală cu ordinul de multiplicitate al rădăcinii. Deci fracția se scrie sub forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + 2b_1x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + 2b_r x + c_r)^{\beta_r}},$$

unde $b_1^2 - c_1 < 0, \dots, b_r^2 - c_r < 0$ și $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_r$ sînt numere naturale. Frațiile simple sînt de următoarele patru tipuri

$$\frac{A}{x - x_j}, \frac{B}{(x - x_j)^r}, \frac{Cx + D}{x^2 + 2b_j x + c_j}, \frac{Ex + F}{(x^2 + 2b_j x + c_j)^r},$$

unde A, B, C, D, E și F sînt constante reale. Se poate arăta că orice fracție rațională se poate descompune, în mod unic, într-o sumă de fracții simple de aceste patru tipuri, după următoarea regulă:

pentru orice rădăcină reală a , multiplă de ordinul m , în descompunere corespunde suma de m fracții simple

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_m}{(x - a)^m},$$

pentru orice pereche de rădăcini complex conjugate, rădăcini ale trinomului $x^2 + 2bx + c$, multiple de ordinul n , în descompunere avem suma a n fracții simple

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + 2bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + 2bx + c)^2} + \dots + \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + 2bx + c)^n}.$$

Pentru calculul coeficienților fracțiilor simple avem două metode. Prima metodă constă în a aduce la numitor comun fracțiile simple și în a identifica numărătorii celor două părți ale identității. Se obțin atâtea ecuații liniare câți coeficienți au fracțiile simple. Metoda este greoaie dacă numărul fracțiilor simple este ceva mai mare. A doua metodă permite determinarea pe rînd a coeficienților fracțiilor și controlul pas cu pas al calculelor. Și anume, să punem în evidență în descompunere fracțiile corespunzătoare rădăcinii reale a , multiplă de ordinul m ,

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m Q_1(x)} \equiv \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{R(x)}{Q_1(x)},$$

unde $R(x)$ are gradul mai mic decît $Q_1(x)$. Pentru a determina coeficientul A_m , al celei mai mari puteri a lui $x-a$, se înmulțește identitatea cu $(x-a)^m$ și făcînd $x-a=0$, găsim $A_m = P(a)/Q_1(a)$. Frația cu coeficientul determinat se trece în partea întîia, se aduce acolo la numitor comun și fracția obținută *trebuie* (controlul!) să se simplifice cu $x-a$ la cel puțin puterea întîia (O simplificare cu $(x-a)^k$ arată că $A_{m-1} = A_{m-2} = \dots = A_{m-k+1} = 0$). Analog se determină coeficientul A_{m-1} , ș.a.m.d. (Dacă la determinarea acestui coeficient se ajunge la forma $0/0$, înseamnă că în faza precedentă nu s-a simplificat cu puterea maximă a lui $x-a$). Se determină apoi coeficienții corespunzători altor rădăcini reale ale numitorului. Să punem acum în evidență fracțiile simple corespunzătoare trinomului $x^2 + 2bx + c$ ($b^2 - ac < 0$) multiple de ordinul n

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{(x^2 + 2bx + c)^n Q_1(x)} &\equiv \frac{B_nx + C_n}{(x^2 + 2bx + c)^n} + \dots + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + 2bx + c} + \\ &+ \frac{R_1(x)}{Q_1(x)}, \end{aligned}$$

unde $Q_1(x)$ nu se mai divide cu $x^2 + 2bx + c$. Pentru determinarea

coeficienților B_n, C_n , înmulțim peste tot cu $(x^2 + 2bx + c)^n$ și facem $x^2 + 2bx + c = 0$. Avem

$$\left. \frac{P(x)}{Q_1(x)} \right|_{x^2 + 2bx + c = 0} = B_n x + C_n.$$

Calculul valorii fracției din partea întâia se face ca la § 4.1.1. Înlocuind repetat în $\frac{P(x)}{Q_1(x)}$ pe x^2 prin $-2bx - c$, se obține

$$\frac{\alpha x + \beta}{\alpha_1 x + \beta_1} = B_n x + C_n.$$

Înmulțind cu numitorul și înlocuind din nou pe x^2 , se ajunge la o egalitate de forma $\alpha x + \beta = \gamma x + \delta$. Cum putem scrie $x = u + iv$, rezultă $\alpha u + \beta = \gamma u + \delta$ și $\alpha v = \gamma v$, deci $\alpha = \gamma$ și $\beta = \delta$, de unde se găsesc valorile coeficienților căutați. Frația cu coeficienții determinați se trece în partea întâia, se aduce la numitor comun și fracția obținută *trebuie* să se simplifice cu $x^2 + 2bx + c$, cel puțin la puterea întâia. Se repetă apoi procedeul pentru fracția următoare.

O b s e r v a ț i e. În cazul când s-a ajuns la o fracție rațională a cărui numitor are sau numai o singură rădăcină reală a , sau numai rădăcinile complex conjugate ale trinomului $x^2 + 2bx + c$, descompunerea rezultă imediat dacă numărătorul se dezvoltă după puterile lui $x - a$, respectiv $x^2 + 2bx + c$ (§ 4.1.2).

E x e m p l e.

$$1^\circ \quad \frac{1}{(x-1)^3(x+1)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Deducem $A = -\frac{1}{8}$ și apoi avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^3(x+1)} + \frac{1}{8(x+1)} &= \frac{x^2 - 4x + 7}{8(x-1)^3} \equiv \\ &\equiv \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x-1}. \end{aligned}$$

Pentru determinarea coeficientului B , am putea proceda ca mai sus, însă rezultatul se obține imediat făcând schimbarea $x - 1 = u$ (sau

dezvoltînd numărătorul și numitorul fracției după puterile lui $x - 1$).
Avem

$$\frac{u^2 - 2u + 4}{8u^3} \equiv \frac{B}{u^3} + \frac{C}{u^2} + \frac{D}{u}$$

deci $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{8}$.

$$2^\circ \frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}.$$

Înmulțind identitatea cu $x^2 + x + 1$ și făcînd $x^2 + x + 1 = 0$, avem

$$\frac{1}{-2x} = Ax + B, \text{ sau } 1 = 2(A - B)x + 2A,$$

deci $A - B = 0$, $1 = 2A$, așa că $A = B = \frac{1}{2}$. Trecînd fracția cu coeficienții determinați în partea întâia, avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} - \frac{1}{2} \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} &= -\frac{1}{2} \frac{x - 1}{x^2 - x + 1} \equiv \\ &\equiv \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}, \end{aligned}$$

deci $C = -D = -\frac{1}{2}$.

3° Pentru a descompune în fracții simple, fracția rațională

$$F \equiv \frac{x^5 - x^3 + x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 2x + 3)^3},$$

avem

$$\begin{aligned} x^5 - x^3 + x^2 + 2x - 1 &\equiv (x^2 + 2x + 3)^2(x - 4) + \\ &+ (x^2 + 2x + 3)(5x + 19) - 12x - 22, \end{aligned}$$

deci

$$F \equiv \frac{-12x - 22}{(x^2 + 2x + 3)^3} + \frac{5x + 19}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x + 3}.$$

6. EXPRESII ALGEBRICE IRAȚIONALE

Calculul cu expresiile algebrice care conțin și radicali din expresii raționale, se face după regulile din paragrafele precedente. În plus trebuie să se țină seama de definiția și proprietățile radicalilor aritmetici, în special de condițiile ce trebuiesc impuse variabilelor pentru ca radicalii să existe. Se mai utilizează transformările din § 6.2—6.4.

6.1. RADICALI ARITMETICI

Prin rădăcina aritmetică de ordinul n (număr natural) dintr-un număr real dat A , se înțelege numărul real B , pozitiv dacă n este par și de același semn cu A dacă n este impar și așa ca $A = B^n$ și scriem $\sqrt[n]{A} = B$. Numărul real B există totdeauna dacă n este impar și numai dacă $A \geq 0$, dacă n este par. Simbolul $\sqrt[n]{}$ se numește *radical de ordinul n* și el indică operația de extragere a rădăcinii de ordinul n dintr-un număr real dat. Numărul n se numește *indicele radicalului*.

Trebuie făcută diferența dintre rădăcina aritmetică și rădăcina algebrică dintr-un număr (a se vedea rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex). Prima are o singură valoare, sau nici una, iar ultima are n valori. Avem proprietățile

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}, \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}}, \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}, \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

6.2. RADICALI DIN EXPRESII RAȚIONALE

Se numește *formă canonică* a unui radical, un radical dintr-o expresie rațională întreagă, înmulțit cu o expresie rațională.

Orice radical dintr-o expresie rațională se caută să se aducă la *forma canonică* prin următoarele transformări:

- scoaterea de sub radical a unor factori raționali,
- transformarea radicalului astfel ca să obținem un radical dintr-o expresie rațională întreagă,
- eliminarea eventualului factor comun dintre ordinul radicalului și puterea la care este ridicată expresia de sub radical.

Exemple.

$$A \sqrt[15]{\frac{a^{18}b^6}{c^{21}}} = \frac{Aa}{c^2} \sqrt[5]{ab^2c^3}; \quad \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{1}{a-b} \sqrt{a^2-b^2}.$$

Doi radicali se zic *asemenea* dacă, în formele lor canonice, radicalii au același ordin și aceeași expresie sub radical.

De exemplu radicalii $\sqrt{\frac{a}{b}}$ și $\sqrt{\frac{b}{a}}$ sînt asemenea, căci formele lor canonice sînt $\frac{1}{b} \sqrt{ab}$ și $\frac{1}{a} \sqrt{ab}$. În adunarea și scăderea radicalilor se adună și se scad numai radicalii asemenea. Înmulțirea și împărțirea radicalilor se face numai după ce aceștia au fost aduși la același indice.

6.3. RAȚIONALIZAREA NUMITORULUI UNEI FRAȚII

Utilizînd formulele de înmulțire prescurtată (§ 3.2), a și b fiind expresii raționale nenegative, avem

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

și mai general

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}}{a-b}.$$

O formulă analoagă există pentru raționalizarea numitorului $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ în cazul cînd n este impar. Dacă indicii radicalilor nu sînt egali, radicalii se aduc întîi la același indice.

În cazul cînd la numitorul fracției avem o sumă algebrică de radicali de ordinul doi $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \dots, \sqrt{k}$ din expresiile raționale $a, b, \dots, k$, se elimină pe rînd cîte un radical. Avem succesiv

$$\begin{aligned} \frac{P}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \dots + \sqrt{k}} &= \frac{P}{\sqrt{a} + Q} = \frac{P(\sqrt{a} - Q)}{a - Q^2} = \frac{P_1}{R\sqrt{b} + S} = \\ &= \frac{P_1(R\sqrt{b} - S)}{bR^2 - S^2} = \dots \end{aligned}$$

Numitorul $a - Q^2$ nu mai conține pe $\sqrt{a}$, iar $bR^2 - S^2$ nu conține nici pe $\sqrt{a}$, nici pe $\sqrt{b}$ etc.

Expresia cu care se amplifică numitorul se numește conjugata acestuia.

Observație. Procedul precedent se poate utiliza pentru a face rațională o ecuație de forma $P = 0$, unde P este o expresie irațională. În adevăr ea se poate înlocui cu ecuația $PQ = 0$, unde expresia Q este astfel aleasă ca ecuația să fie rațională. Este evident că noua ecuație are ca rădăcini și rădăcinile ecuației $Q = 0$.

6.4. TRANSFORMAREA EXPRESIEI $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, (unde a și b sînt expresii raționale nenegative)

Se caută ca expresia să fie scrisă ca sumă sau diferență de doi radicali

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y},$$

unde x și y sînt expresii raționale nenegative. Transformarea este posibilă numai dacă $a^2 - b = c^2$, unde c este o expresie rațională nenegativă și atunci avem

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \quad \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

7. EXPRESII MATEMATICE TRANSCENDENTE

Expresiile transcendente conțin în plus față de cele algebrice și operația de trecere la limită, direct sau inclusă în definiția unor funcții numite transcendente dintre care cele mai simple sînt așa-numitele transcendente elementare a^x , $\log_a x$, x^α (α real), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, precum și funcțiile inverse ale acestora din urmă.

Vom reaminti proprietățile fundamentale ale primelor două funcții, dealtfel strîns legate de celelalte.

7.1 FUNCȚIA EXPONENTIALĂ e^x

este definită pentru orice x real prin formula

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n.$$

Funcția mai generală a^x ($a > 0$ și $a \neq 1$) se deduce ușor punând $a = e^b$. Ea are proprietățile

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Funcția e^x intervine așa de des în aplicații, încât s-a simțit nevoia de a nota în mod special și următoarele combinații

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x},$$

numite *funcții hiperbolice* și anume sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta hiperbolică (Fig. 1.1).

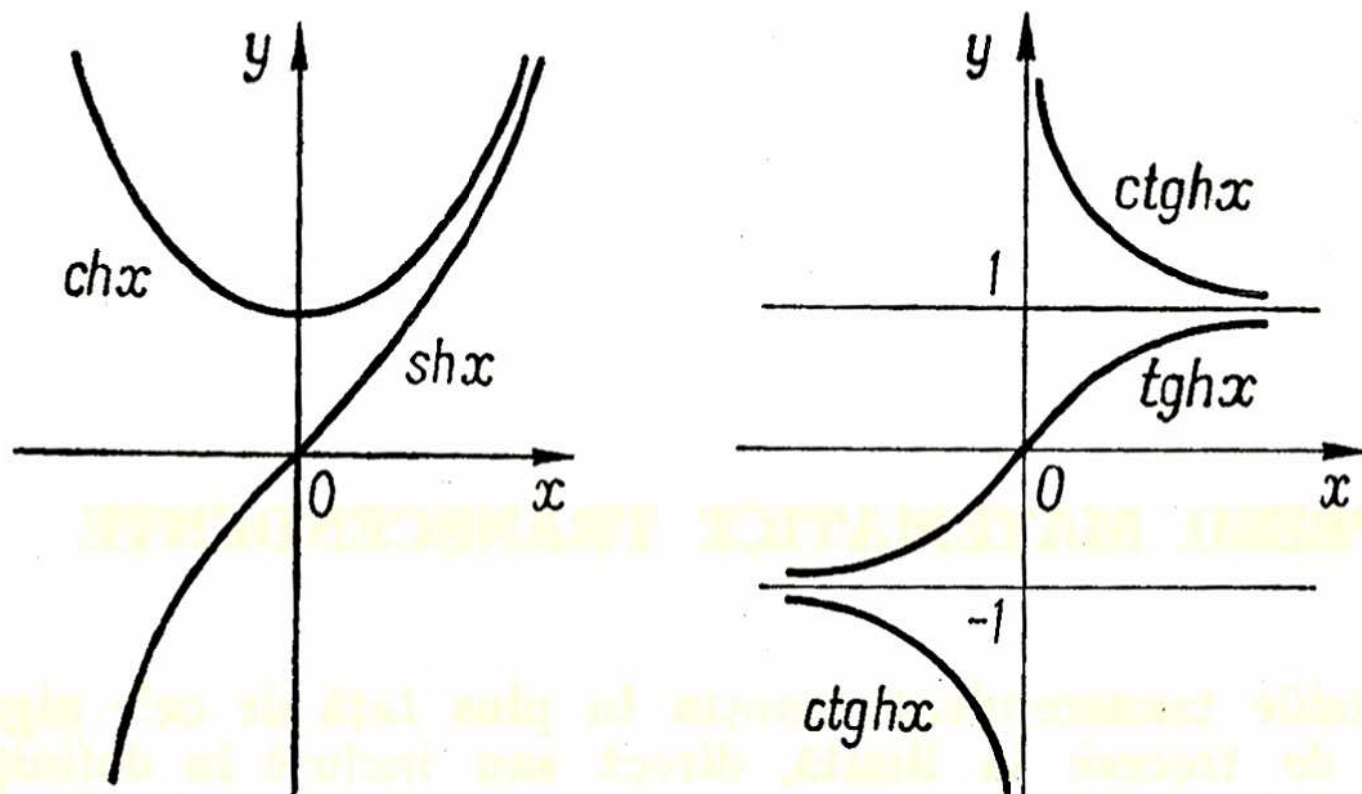


Fig. 1.1

Acestea satisfac relații analoage cu cele de la funcțiile circulare $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Astfel avem

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (\text{formula fundamentală})$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \quad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y},$$

$$\operatorname{sh} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}}, \quad \operatorname{ch} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}};$$

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \operatorname{ch} \frac{x - y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}.$$

Funcția exponențială are aceeași definiție și în cazul când variabila independentă este complexă. În particular, când ea este pur imaginară, avem

$$e^{ix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n, \quad x \text{ real.}$$

Pentru această funcție, avem *formula lui Euler*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

remarcabilă pentru că face legătura dintre funcția exponențială și funcțiile trigonometrice $\sin x$, $\cos x$. Înlocuind mai sus pe x cu $-x$, avem

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

și apoi

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

analoage cu formulele pentru $\operatorname{ch} x$ și $\operatorname{sh} x$. Rezultă atunci următoarele legături între funcțiile circulare și cele hiperbolice

$$\begin{aligned} \sin x &= -i \operatorname{sh} ix, & \cos x &= \operatorname{ch} ix, & \operatorname{tg} x &= -i \operatorname{th} ix, \\ \operatorname{sh} x &= -i \sin ix, & \operatorname{ch} x &= \cos ix, & \operatorname{th} x &= -i \operatorname{tg} ix. \end{aligned}$$

7.2. FUNCȚIA LOGARITMICĂ $\log_a x$,

definită pentru $x > 0$, este funcția inversă a funcției a^x .
Oricare ar fi baza $a > 0$ și $a \neq 1$, avem

$$\log_a a = 1, \log_a 1 = 0, \log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \log_a \sqrt[\alpha]{x} = \frac{1}{\alpha} \log_a x.$$

Pentru un a fix, numerele $\log_a x$, $x \in \mathbb{R}_+$ se zic că formează *sistemul de logaritmi cu baza a* . Trecerea de la o bază la alta se face prin formula

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Este utilă și formula

$$\log_{b^\alpha} x^\alpha = \log_b x.$$

Bazele cele mai des utilizate sînt e (logaritmii sînt notați cu $\ln$) și 10 (logaritmii sînt notați cu $\lg$). Primii se numesc *naturali*, iar ceilalți *zecimali*.

Funcția putere x^α , α real, se definește prin

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

și are aceleași proprietăți ca și în cazul cînd α este un număr întreg.

8. PROGRESII

Un șir de numere $a_1, a_2, \dots, a_n$ se zice că formează o *progresie aritmetică* dacă $a_k = a_{k-1} + r$, și o *progresie geometrică* dacă $a_k = qa_{k-1}$, pentru $k = 2, 3, \dots, n$. Numerele r și q se numesc *rații*.

Pentru o progresie aritmetică avem

$$a_k = a_1 + (k-1)r, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_k = \frac{a_1 + a_k}{2} k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

și relația ce o caracterizează

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad 2 \leq k \leq n-1.$$

Pentru o progresie geometrică avem

$$a_k = a_1 q^{k-1}, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_1 \frac{1 - q^k}{1 - q}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

și relația ce o caracterizează

$$a_k^2 = a_{k-1} a_{k+1}, \quad 2 \leq k \leq n-1.$$

În cazul când numărul termenilor unei progresii geometrice este infinit, zicem că avem o *progresie geometrică infinită*. Dacă $|q| < 1$ suma termenilor ei este

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Cap. II. Analiză combinatorie

1. COMBINĂRI, ARANJĂRI ȘI PERMUTĂRI

Noțiunile introduse în acest capitol se referă la numărarea diferitelor posibilități de ordonare ale unor mulțimi finite de elemente (obiecte) distincte, pe baza unor reguli date.

Se numesc *combinații a n obiecte luate câte p* ($p \leq n$), grupele ce se pot forma cu aceste obiecte, fiecare grupă conținând p din aceste obiecte, două grupe deosebindu-se prin natura a cel puțin un obiect. Numărul acestor grupe se notează cu C_n^p , sau uneori cu $\binom{n}{p}$ și pentru generalitate se convine ca $C_n^0 = 1$.

Avem formulele

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad C_n^p = C_n^{n-p},$$

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}, \quad C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-2}^{p-1} + \dots + C_{p-1}^{p-1}.$$

Se numesc *aranjări a n obiecte luate câte p* ($p \leq n$), grupele ce se pot forma cu aceste obiecte, fiecare grupă conținând p din aceste obiecte, două grupe deosebindu-se prin natura sau prin așezarea obiectelor. Numărul acestor grupe se notează cu A_n^p .

Avem

$$A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1), \text{ deci } A_n^p = C_n^p \cdot p!; \quad A_n^1 = n, \quad A_n^n = n!.$$

Se numesc *permutări a n obiecte* grupele ce se pot forma cu aceste obiecte, fiecare grupă conținând toate obiectele, două grupe deosebindu-se prin așezarea obiectelor. Numărul acestor grupe se notează cu P_n și avem $P_n = n!$. Putem scrie

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p} \text{ și } A_n^n = P_n.$$

Exemplu. Cu trei obiecte a, b, c putem forma: trei combinații ale obiectelor luate câte unu: $a; b; c$, trei combinații ale obiectelor luate câte două: $ab; ac; bc$, o singură combinație a obiectelor luate câte trei: abc .

Aranjările corespunzătoare sînt

$a; b; c.$

$ab; ba; ac; ca; bc; cb.$

$abc; acb; bac; bca; cab; cba.$

Permutările celor trei obiecte sînt scrise pe linia de mai sus.

Observație. Obiectele cu care se formează permutările pot fi notate cu numerele naturale $1, 2, \dots, n$ și prin aceasta permutările unor obiecte se reduc formal la permutările acestor n numere naturale. Într-o asemenea permutare, zicem că două numere (consecutive sau nu) prezintă o *permanență*, sau o *inversiune*, după cum ele se găsesc în permutare în ordinea naturală, sau nu. Astfel, în permutarea $1, 3, 2$ perechile de numere $(1, 3)$ și $(1, 2)$ prezintă permanențe, iar perechea $(3, 2)$ prezintă o inversiune. Se zice că o permutare este de clasă *pară*, respectiv de clasă *impară*, dacă numărul total al inversiunilor ei este par, respectiv impar. Astfel permutarea $1, 3, 2$ este de clasă impară. Avem proprietățile: schimbînd între ele două elemente ale unei permutări, permutarea își schimbă clasa; din cele $n!$ permutări ale numerelor naturale $1, 2, \dots, n$, jumătate sînt de clasă pară și jumătate de clasă impară.

2. COMBINĂRI, ARANJĂRI ȘI PERMUTĂRI CU REPETIȚIE

În noțiunile de mai sus fiecare obiect apărea, într-o grupă oarecare, cel mult o dată. Aceste noțiuni se pot generaliza permițînd ca obiectele să poată apărea într-o grupă de mai multe ori. Avem astfel următoarele definiții:

Se numesc *combinații cu repetiție a n obiecte distincte luate câte p* , grupele ce se pot forma cu aceste obiecte, în fiecare grupă fiind p obiecte, fiecare obiect putînd fi repetat pînă la p ori, însă în așa fel încît două grupe să difere prin natura cel puțin a unui obiect

dintre cele care intervin. Numărul grupelor de combinații cu repetiții a n obiecte luate câte p se notează cu γ_n^p și avem

$$\gamma_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{n(n+1) \dots (n+k-1)}{k!}.$$

Se numesc *aranjări cu repetiție* a n obiecte distincte luate câte p , grupelile ce se pot forma cu aceste obiecte, în fiecare grupă fiind p obiecte, fiecare obiect putînd fi repetat pînă la p ori, două grupe diferind fie prin natura obiectelor care intervin, fie prin ordinea lor.

Notînd cu α_n^p numărul aranjărilor a n obiecte luate câte p , avem

$$\alpha_n^k = n^k.$$

În ce privește permutările cu repetiție, putem avea următoarele două cazuri:

1° *permutările cu repetiție a n obiecte, fiecare obiect putînd fi repetat pînă la n ori*, se obțin din aranjările cu repetiție făcînd $n = k$. Numărul grupelor este deci n^n ;

2° *permutările cu repetiție a n obiecte, n_1 dintre ele fiind egale cu a_1 , n_2 dintre ele cu a_2 , ..., n_k dintre ele cu a_k , unde $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$* ; numărul grupelor este egal cu

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

E x e m p l e. Cu trei obiecte a, b, c putem forma:

$\gamma_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$ combinații cu repetiție luate câte două:

aa, bb, cc, ab, ac, bc ;

$\alpha_3^2 = 3^2 = 9$ aranjări cu repetiție luate câte două:

$aa, bb, cc, ab, ba, ac, ca, bc, cb$;

$3^3 = 27$, permutări ale celor trei obiecte a, b, c fiecare putînd fi repetat pînă la trei ori:

$aaa, bbb, ccc, aab, aba, baa, aac, aca, caa,$

$abb, bab, bba, cbb, bcb, bbc, cca, cac, acc,$

$ccb, cbc, bcc, abc, acb, bac, bca, cab, cba$;

$\frac{4!}{2!1!1!} = 12$, permutări a celor trei obiecte a, b, c , a fiind luat de două ori, iar celelalte câte o dată:

$aabc, aacb, baac, caab, bcaa, cbaa$
 $abac, acab, abca, acba, baca, caba.$

3. FORMULA BINOMULUI

Formula binomului, sau binomul lui *Newton*, este

$$(x + a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + C_n^n a^n.$$

Coeficienții care apar în această formulă

$$(1) \quad C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$$

poartă denumirea de *coeficienții binomiali* corespunzători puterii a n -a. Avem proprietățile

coeficienții binomiali egali depărtați de extremi sînt egali,
 coeficienții binomiali din șirul (1) cresc pînă la unul, sau doi dintre ei (după cum n este par sau impar) și apoi descresc.

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n, \quad C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0,$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}, \quad C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}.$$

4. FORMULA POLINOMULUI

este o generalizare a celei precedente. Avem

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k},$$

în partea a doua exponenții $n_1, n_2, \dots, n_k$ luînd toate valorile întregi nenegative și așa ca $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Coeficientul din termenul general este numărul permutărilor cu repetiție a n obiecte, așa ca n_1 să fie egale cu x_1 , n_2 egale cu x_2 , $\dots$, n_k egale cu x_k .

Cap. III. Numere complexe

1. GENERALITĂȚI

Se numește număr complex un număr de forma

$$(1) \quad c = a + ib, \quad i = \sqrt{-1},$$

unde a și b sînt numere reale.

Se utilizează termenii de *parte reală* pentru a și *parte imaginară* pentru b și se notează $a = \operatorname{Re} c$, $b = \operatorname{Im} c$. În cazul cînd numărul complex este variabil, el se notează $z = x + iy$.

Forma (1) a numerelor complexe se numește *forma algebrică* a lor.

Numărului complex c îi corespunde în plan punctul M de coordonate a și b și reciproc. Se zice că M este *imaginea* numărului complex c , iar c este *afixul* punctului M (Fig. 3.1). Planul în care sînt reprezentate numerele complexe se numește *planul complex* sau *planul* (z).

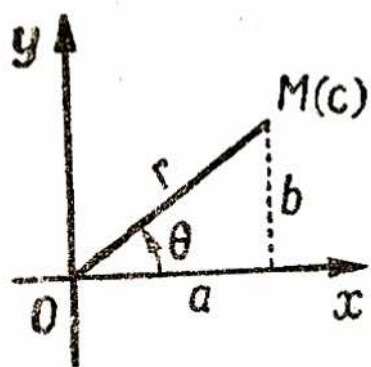


Fig. 3.1

Dacă $b = 0$, numărul complex se zice *pur real*, iar dacă $a = 0$, *pur imaginar*. Numerele pur reale au imaginile lor pe axa absciselor, iar cele pur imaginare pe axa ordonatelor.

Numerele $c = a + ib$ și $\bar{c} = a - ib$ se numesc *complex conjugate* (pe scurt conjugate) și imaginile lor sînt simetrice față de axa absciselor.

Un număr complex este nul dacă atît partea reală cît și partea imaginară sînt nule.

Numerele complexe au și o *formă trigonometrică*

$$(2) \quad c = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

unde r se numește *modulul* numărului complex (notație $|c|$) și este distanța de la originea planului complex la imaginea M a numărului complex, iar θ se numește *argumentul* numărului complex și este unghiul dintre axa Ox și OM , măsurat în sensul direct trigonometric (Fig. 3.1).

Orice număr complex are o infinitate de argumente ce diferă între ele printr-un multiplu de 2π . Valoarea $0 \leq \theta < 2\pi$, se numește *valoare principală*. Singurul număr complex pentru care valoarea principală a argumentului nu este determinată este numărul zero, care are modulul nul.

Din formulele (1) și (2), avem

$$\begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases} \text{ deci } \begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} \end{cases}$$

primele formule fiind cele care determină în mod unic valoarea principală a argumentului numărului complex.

2. OPERAȚII

2.1. NUMERELE COMPLEXE SÎNT SCRISE SUB FORMA ALGEBRICĂ

Două numere complexe sînt *egale*, dacă și numai dacă sînt egale părțile reale și părțile imaginare, deci din $a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$, rezultă $a_1 = a_2$ și $b_1 = b_2$.

Prin *suma*, *diferența*, *produsul* și *cîtul* a două numere

$$c_1 = a_1 + ib_1, \quad c_2 = a_2 + ib_2$$

se înțeleg următoarele numere complexe

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \quad c_1 - c_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2), \\ c_1 c_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1), \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

În particular, produsul a două numere complex conjugate este un număr real

$$c \bar{c} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Puterea n-a a unui număr complex se obține cu ajutorul formulei binomului

$$\begin{aligned} c^n &= (a + ib)^n = a^n - C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^4 a^{n-4} b^4 - \dots \\ &\quad \dots + i(C_n^1 a^{n-1} b - C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots) \end{aligned}$$

unde am ținut seama că $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ...

Extragerea rădăcinii de ordinul n dintr-un număr complex conduce la un sistem de două ecuații fiecare de ordinul n , căci din

$$\sqrt[n]{a + ib} = x + iy$$

rezultă

$$\begin{cases} a = x^n - C_n^2 x^{n-2} y^2 + C_n^4 x^{n-4} y^4 - \dots \\ b = C_n^1 x^{n-1} y - C_n^3 x^{n-3} y^3 + \dots \end{cases}$$

Metoda se utilizează pentru $n = 2$ și numai în cazuri particulare pentru $n > 2$.

2.2. NUMERELE COMPLEXE SÎNT SCRISE SUB FORMA TRIGONOMETRICĂ

Fie numerele complexe $c_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $c_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$.

Două numere complexe sînt *egale* dacă modulele sînt egale și dacă argumentele sînt egale, sau diferă printr-un multiplu de 2π . Deci din $c_1 = c_2$, rezultă $r_1 = r_2$ și $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ (k întreg).

Suma și diferența a două numere complexe scrise sub această formă nu prezintă un interes deosebit din punct de vedere al calculului.

Produsul și cîtul a două numere complexe sînt date de

$$c_1 c_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)],$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)].$$

Puterea n -a a unui număr complex este dată de

$$c^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Dacă $r = 1$, obținem formula lui Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + C_n^4 \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots$$

$$\sin n\theta = C_n^1 \cos^{n-1} \theta \sin \theta - C_n^3 \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots$$

Cele n rădăcini ale unui număr complex sînt

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{r(\cos \theta + i \sin \theta)} &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) = \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right),\end{aligned}$$

unde $k = 0, 1, \dots, n-1$, sau orice n numere întregi consecutive.

Dacă $r = 1$ și $\theta = 0$, avem cele n rădăcini ale unității

$$\sqrt[n]{1} = e_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Imaginile acestora se găsesc pe cercul cu centrul în origine și raza unitate, mai precis sînt vîrfurile poligonului regulat convex cu n laturi înscris în acest cerc, un vîrf avînd afixul 1 (Fig. 3.2). Unele dintre aceste rădăcini au proprietatea că ridicate la n puteri succesive, reproduc toate cele n rădăcini ale unității. Acestea se numesc *rădăcini primitive*.

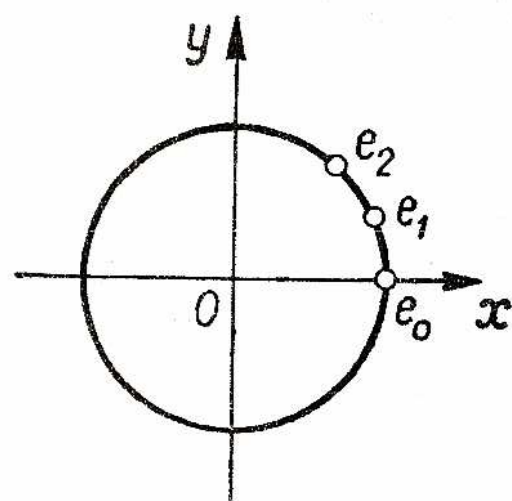


Fig. 3.2

Exemplu. Rădăcinile unității: de ordinul doi sînt $+1$ și -1 ; de ordinul trei sînt $+1$, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; de ordinul patru sînt $+1$, -1 , $+i$, $-i$, cele subliniate fiind rădăcinile primitive.

Cap. IV. Ecuații și inecuații cu o singură necunoscută

1. GENERALITĂȚI

O ecuație cu o singură necunoscută se poate întotdeauna scrie sub forma

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

funcția $f(x)$ fiind reală sau complexă, ca și variabila independentă x . Pentru anumite teoreme, ea trebuie să îndeplinească anumite condiții, ce vor fi menționate de fiecare dată.

Ecuația (1) se numește *algebrică* de grad n , dacă $f(x)$ este un polinom de gradul $n \geq 1$ și *transcendentă* în caz contrar. Se numește *soluție*, sau *rădăcină* a ecuației (1) (sau a funcției $f(x)$), orice valoare a variabilei independente x , care transformă ecuația în egalitatea aritmetică $0 = 0$. Prin rezolvarea unei ecuații, se înțelege găsirea tuturor rădăcinilor ei. Teoria ecuațiilor are drept scop găsirea diferitelor proprietăți ale unei ecuații, care să permită calculul exact, sau cu aproximație, al rădăcinilor ei și să se tragă concluzii asupra rădăcinilor când coeficienții au anumite proprietăți.

Cum pentru ecuațiile transcendente avem puține rezultate, în continuare ne vom referi la *ecuații algebrice cu coeficienți reali*, menționând cazurile în care proprietățile au loc în condiții mai generale. Pentru fixarea ideilor, să considerăm ecuația algebrică de gradul n (pe scurt ecuația de gradul n)

$$(2) \quad P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

unde coeficienții $a_0, a_1, \dots, a_n$ sînt constante reale, sau complexe.

Teorema lui d'Alembert. Orice ecuație algebrică are o rădăcină.

Dacă rădăcina este x_1 ecuația se scrie

$$P(x) = (x - x_1) Q(x) = 0.$$

unde $Q(x)$ este câtul împărțirii polinomului $P(x)$ cu binomul $x - x_1$. Cum $Q(x)$ este tot un polinom, el are de asemenea o rădăcină x_2 , deci

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)Q_1(x) = 0.$$

Din aproape în aproape rezultă că orice ecuație de gradul n are exact n rădăcini și putem scrie

$$(3) \quad P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0,$$

unde $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt rădăcinile reale sau complexe ale ecuației.

Formula precedentă ne dă descompunerea în factori liniari (de gradul întâi) a polinomului $P(x)$, peste corpul numerelor complexe. Cum unele dintre rădăcini pot fi egale între ele, descompunerea precedentă se scrie

$$P(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} = 0$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sînt numere naturale și $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$. Se zice că $x_1, x_2, \dots, x_k$ sînt rădăcini multiple respectiv de ordinele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Rezultă că pentru orice rădăcină x_r , multiplă de ordinul α_r , avem identitatea

$$P(x) \equiv (x - x_r)^{\alpha_r} S(x),$$

unde $S(x)$ este un polinom și reciproc.

În cazul cînd $\alpha_r = 1$, rădăcina se numește simplă.

Două ecuații care au aceleași rădăcini, cu aceleași ordine de multiplicitate, au coeficienții proporționali și reciproc.

Pentru o ecuație algebrică cu coeficienți reali, dacă ecuația are o rădăcină complexă, ea are și rădăcina complex conjugată.

Produsul celor doi factori din (3), corespunzători acestor două rădăcini, este un trinom de gradul doi cu coeficienți reali, deci orice ecuație algebrică cu coeficienți reali se descompune peste corpul numerelor reale în factori de gradul întâi (corespunzători rădăcinilor reale) și factori de gradul doi (corespunzători perechilor de rădăcini complex conjugate) și avem

$$P(x) \equiv$$

$$\equiv a_0(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_s)^{\alpha_s} (x^2 + 2b_1x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + 2b_tx + c_t)^{\beta_t} = 0$$

unde $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t$ sînt numere naturale așa ca $\alpha_1 + \dots + \alpha_s + 2\beta_1 + \dots + 2\beta_t = n$ și unde am ținut seama de faptul că unele rădăcini ar putea fi multiple. Tot de aici rezultă că *orice ecuație cu coeficienți reali și de grad impar are cel puțin o rădăcină reală*.

Să mai amintim aici și teorema :

orice ecuație algebrică cu coeficienți raționali $P(x) = 0$, care are drept rădăcină un număr irațional algebric* de ordinul doi, are ca rădăcină și numărul irațional conjugat. Se deduce ușor că polinomul $P(x)$ se divide cu un trinom de gradul al doilea cu coeficienți numere raționale.

Între coeficienții polinomului și rădăcinile lui avem relațiile lui Viète

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0} \\
 & x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}
 \end{aligned}$$

deosebit de utile în aplicații, în special cînd se mai dă încă o relație între rădăcini. Pentru cazul $n = 4$, este bine ca ele să fie scrise sub forma

$$\begin{aligned}
 (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) &= -\frac{a_1}{a_0} \\
 (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 &= \frac{a_2}{a_0} \\
 (x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 &= -\frac{a_3}{a_0} \\
 (x_1x_2)(x_3x_4) &= \frac{a_4}{a_0}
 \end{aligned}$$

* Un număr irațional se zice algebric, dacă este rădăcină a unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali și transcendent în caz contrar. El este algebric de ordinul doi, dacă gradul ecuației este doi, caz în care are forma $A + \sqrt{B}$, A, B numerele raționale, iar $B > 0$ și diferit de un pătrat perfect.

mai ales în cazul cînd în continuare este avantajos de a lua ca noi necunoscute sumele și produsele a cîte două rădăcini ale ecuației date.

Polinoamele omogene din partea întâia ale relațiilor lui Viète se numesc *funcții simetrice fundamentale* ale rădăcinilor $x_1, x_2, \dots, x_n$. Prin *funcții simetrice elementare* ale aceluiași rădăcini se înțeleg polinoamele simetrice și omogene

$$s_p = \sum_{k=1}^n x_k^p, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Acestea se exprimă cu ajutorul coeficienților ecuației, prin **formulele lui Newton**

$$a_0 s_1 + a_1 = 0$$

$$a_0 s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_0 s_{n-1} + a_1 s_{n-2} + a_2 s_{n-3} + \dots + (n-1) a_{n-1} = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

și în general pentru $p \geq n$

$$a_0 s_p + a_1 s_{p-1} + a_2 s_{p-2} + \dots + a_{n-1} s_{p-n+1} + a_n s_{p-n} = 0.$$

Această ultimă relație se obține înmulțind ecuația cu x^{p-n} , înlocuind variabila x pe rînd cu $x_1, x_2, \dots, x_n$ și adunînd rezultatele. Ea arată că orice funcție s_p se calculează cu ajutorul funcțiilor

$$s_0 = n, s_1, s_2, \dots, s_{p-1}.$$

Avem teorema:

orice funcție rațională și simetrică de rădăcinile unei ecuații algebrice este o funcție rațională de coeficienții acestei ecuații, adică de funcțiile simetrice fundamentale ale rădăcinilor.

2. FORMULE DE REZOLVARE A ECUAȚIILOR ALGEBRICE

2.1. ECUAȚIA DE GRADUL ÎNTÎI $ax + b = 0$

are rădăcina $-\frac{b}{a}$, dacă $a \neq 0$. Dacă $a = 0$ și $b = 0$, avem o infinitate de rădăcini, iar dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, nu avem nici o rădăcină.

2.1.1. Semnul binomului $ax + b$

este contrar semnului lui a , pentru orice x mai mic decât rădăcina $-\frac{b}{a}$ și de același semn cu a în caz contrar.

2.2. ECUAȚIA DE GRADUL AL DOILEA $ax^2 + bx + c = 0$,

are rădăcinile

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \quad (2b' = b).$$

Rădăcinile x_1 și x_2 sînt reale, confundate sau complexe, după cum discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$ este respectiv pozitiv, nul, sau negativ.

Ținînd seama de relațiile lui Viète

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

în cazul rădăcinilor reale se poate face și o discuție a semnului rădăcinilor :

$P > 0$	$S > 0$	două rădăcini pozitive,
	$S < 0$	„ „ negative,
$P = 0$	$S > 0$	o rădăcină nulă, cealaltă pozitivă,
	$S = 0$	două rădăcini nule,
	$S < 0$	o rădăcină nulă, cealaltă negativă,
$P < 0$	$S > 0$	rădăcini de semne contrarii, cea pozitivă mai mare în valoare absolută,
	$S = 0$	rădăcini opuse,
	$S < 0$	rădăcini de semne contrarii, cea negativă mai mare în valoare absolută.

2.2.1. Semnul trinomului $ax^2 + bx + c$ este dat de următoarea regulă :

Dacă $\Delta > 0$, trinomul are același semn cu a , sau semn contrar, după cum x este în afara, sau în interiorul, intervalului format de cele două rădăcini.

Dacă $\Delta = 0$, trinomialul are același semn cu a , afară de rădăcină, în care este nul,

Dacă $\Delta < 0$, trinomialul are același semn cu a .

2.2.2. Compararea numerelor reale cu rădăcinile reale x_1, x_2 ale ecuației $P(x) \equiv ax^2 + bx + c = 0$ (deci $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$)

Se utilizează rezultatele:

O funcție $f(x)$, continuă în $[a, b]$, care ia la capetele segmentului valori de semne contrarii (deci $f(a)f(b) < 0$) se anulează cel puțin o dată în $[a, b]$. În particular, proprietatea este adevărată pentru orice polinom, pe orice segment;

Mijlocul segmentului (x_1, x_2) este $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$.

1°. Compararea unui număr real α cu rădăcinile reale x_1, x_2 :

$x_1 < \alpha < x_2$, dacă $af(\alpha) < 0$,

$\alpha < x_1 < x_2$, dacă $af(\alpha) > 0$ și $\alpha < -\frac{b}{2a}$,

$x_1 < x_2 < \alpha$, dacă $af(\alpha) > 0$ și $\alpha > -\frac{b}{2a}$.

2°. Compararea a două numere reale α, β cu rădăcinile reale x_1, x_2 :

$x_1 < \alpha < x_2 < \beta$, dacă $af(\alpha) < 0$ și $af(\beta) > 0$,

$\alpha < x_1 < \beta < x_2$, dacă $af(\alpha) > 0$ și $af(\beta) < 0$,

$x_1 < \alpha < \beta < x_2$, dacă $af(\alpha) < 0$ și $af(\beta) < 0$,

$x_1 < x_2 < \alpha < \beta$ dacă $af(\alpha) > 0$ și $-\frac{b}{2a} < \alpha$,

$\alpha < \beta < x_1 < x_2$, dacă $af(\beta) > 0$ și $-\frac{b}{2a} > \beta$,

$\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, dacă $af(\alpha) > 0$, $af(\beta) > 0$ și $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$.

2.3. ECUAȚIA DE GRADUL AL TREILEA

Orice ecuație de gradul al treilea $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, prin înlocuirea lui x cu $x - \frac{b}{3a}$, se aduce la forma

$$(5) \quad x^3 + px + q = 0.$$

Pentru această ecuație avem

formula lui Cardan

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Pentru a obține cele trei rădăcini x_1, x_2, x_3 luăm pentru unul dintre radicalii cubici pe rînd una dintre cele trei valori, iar pentru al doilea radical cubic luăm acea valoare care înmulțită cu valoarea primului radical să dea $-\frac{p}{3}$.

Din punct de vedere al realității rădăcinilor ecuației (5), presupusă cu coeficienți reali, avem următoarele cazuri

1° $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$, avem o *singură rădăcină reală*, căci expresiile de sub radicalii cubici sînt reale. Notînd cu y singura valoare reală a primului radical atunci o rădăcină a ecuației (5) este

$$x_1 = y + z,$$

unde z este valoarea reală a celui de al doilea radical cubic (căci yz trebuie să fie real). Notînd cu ε și ε^2 rădăcinile cubice primitive ale unității, celelalte două rădăcini ale ecuației sînt

$$x_2 = \varepsilon y + \varepsilon^2 z, \quad x_3 = \varepsilon^2 y + \varepsilon z.$$

2° $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$, ecuația are *trei rădăcini reale, dintre care două egale între ele*. Rădăcinile sînt

$$x_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

sau cu ajutorul coeficienților ecuației

$$x_1 = \frac{3q}{p}, \quad x_2 = x_3 = \frac{-3q}{2p}.$$

3° $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, ecuația are *trei rădăcini reale, neegale între ele*. Expresiile de sub radicalii cubici sînt complexe, deci și valorile celor doi radicali sînt complexe. Notînd una dintre valorile primului radical cu

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = \alpha + i\beta,$$

cele trei rădăcini ale ecuației (5) sînt

$$(6) \quad x_1 = 2\alpha, \quad x_2 = -\alpha - \beta\sqrt{3}, \quad x_3 = -\alpha + \beta\sqrt{3}.$$

Pentru aplicațiile numerice, este util a scrie sub formă trigonometrică valorile radicalilor. În acest scop, notînd

$$-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = r(\cos \omega + i \sin \omega),$$

de unde

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \operatorname{tg} \omega = -\frac{2\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}{q},$$

rezultă

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos \frac{\omega + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\omega + 2k\pi}{3} \right).$$

$$k = 0, 1, 2.$$

Putem lua deci

$$\alpha + i\beta = \sqrt{-\frac{p}{3}} \left(\cos \frac{\omega}{3} + i \sin \frac{\omega}{3} \right).$$

Rădăcinile (6) devin

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\omega}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\omega + 2\pi}{3}, \quad x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\omega + 4\pi}{3}.$$

2.4. ECUAȚIA DE GRADUL AL PATRULEA

Orice ecuație de gradul al patrulea $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, prin înlocuirea lui x cu $x - \frac{b}{4a}$, se aduce la forma

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Descompunând polinomul din prima parte în produse de trinoame de gradul doi

$$x^4 + px^2 + qx + r \equiv (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 - \alpha x + \gamma),$$

găsirea coeficienților α , β , γ se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul trei și a uneia de gradul doi.

2.5. ECUAȚII BINOME

Se înțelege prin ecuație binomă, o ecuație de forma $Ax^m + Bx^n = 0$, unde m și n sînt numere naturale iar A și B constante (în general complexe).

Eliminînd rădăcinile nule, ecuația se poate scrie

$$x^n - a = 0,$$

deci

$$x = \sqrt[n]{a},$$

asa că soluțiile ecuației sînt cele n valori ale rădăcinii de ordinul n din numărul complex a . Notînd $a = r(\cos \omega + i \sin \omega)$, acestea sînt

$$x = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\omega}{n} + i \sin \frac{\omega}{n} \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

2.6. ECUAȚII TRINOME

Printr-o ecuație trinomă înțelegem o ecuație de forma $Ax^p + Bx^q + Cx^r = 0$ ($p > q > r$), unde p , q , r sînt numere întregi nenegative, iar A , B , C constante complexe.

Eliminînd factorul corespunzător celor r rădăcini nule, obținem ecuația

$$Ax^n + Bx^m + C = 0.$$

În cazurile cînd $n = 2m$, sau $n = 3m$, rezolvarea acestei ecuații se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul doi, respectiv trei, și a unei ecuații binome. În cazul cînd $m = 2$ și $n = 4$, ecuația se numește *bipătrată*.

2.7. ECUAȚII RECIPROCE

Se zice că ecuația (2) este reciprocă, dacă admițînd rădăcina α admite și rădăcina $\frac{1}{\alpha}$.

Rezultă că în ecuație coeficienții termenilor egali depărtați de extremi sînt fie egali (speța întâia), fie opuși (speța a doua). Astfel ecuațiile reciproce de gradul trei sînt de una din formele

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \quad ax^3 + bx^2 - bx - a = 0.$$

Orice ecuație reciprocă de grad impar și de speța întâia are rădăcina -1 , iar cele de speța a doua rădăcina $+1$. Pentru ecuațiile de grad par $2m$ se face substituția

$$x + \frac{1}{x} = y$$

și se ajunge la o ecuație de gradul m în y .

3. TRANSFORMĂRI UZUALE ALE UNEI ECUAȚII

Dacă în ecuația $f(x) = 0$, cu rădăcinile $x_1, x_2, \dots$ se face substituția $x = ky$, ecuația obținută $f(ky) = f_1(y) = 0$, are rădăcinile $\frac{x_1}{k}, \frac{x_2}{k}, \dots$

Pentru a nu schimba notația pentru variabilă, se înlocuiește x cu kx și se zice că se face transformata în kx . Efectul ei este că rădăcinile ecuației inițiale se împart cu numărul k . Cea mai utilizată dintre aceste transformări este transformata în $-x$ ($k = -1$) care schimbă semnul tuturor rădăcinilor.

O altă transformare a ecuațiilor se obține făcînd substituția $x = \frac{1}{y}$, deci făcînd transformata în $\frac{1}{x}$, care are ca efect inversarea tuturor rădăcinilor ecuației.

În fine, transformarea $x = y + k$ realizează o translație a tuturor rădăcinilor cu numărul $-k$.

E x e m p l u. Ecuația

$$x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0,$$

are rădăcinile $-1, 2, 2$, și -3 . Atunci

transformata în $-x$, $x^4 - 9x^2 - 4x + 12 = 0$ are rădăcinile $1, -2, -2$ și 3 ,

„ în $\frac{1}{x}$, $12x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 1 = 0$ „ „ $-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ și $-\frac{1}{3}$

„ „ $2x$, $16x^4 - 36x^2 + 8x + 12 = 0$ „ „ $-\frac{1}{2}, 1, 1$ și $-\frac{3}{2}$

„ „ $x + 2$, $x^4 + 8x^3 + 15x^2 = 0$ „ „ $-3, 0, 0$ și -5

Observație. Transformarea $x = y + k$ este des utilizată pentru ca într-o ecuație de gradul n să facem să dispară termenul de gradul $n-1$. Astfel pentru ecuația

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

trebuie să luăm

$$k = -\frac{a_1}{na_0}.$$

4. CALCULUL RĂDĂCINILOR RAȚIONALE ALE UNEI ECUAȚII ALGEBRICE CU COEFICIENȚI NUMERE ÎNTREGI

Avem teorema :

ecuația

$$(7) \quad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

unde coeficienții $a_0, a_1, \dots, a_n$ sînt numere întregi, nu poate avea rădăcini de forma $\frac{p}{q}$, unde p și q sînt numere întregi prime între

ele, decât dacă p este un divizor al lui a_n , iar q un divizor al lui a_0 . În particular, dacă $q = 1$, orice rădăcină întreagă a ecuației trebuie să dividă pe a_n . De asemenea dacă $a_0 = 1$, singurele rădăcini raționale sînt cele întregi.

În aplicații pentru găsirea rădăcinilor raționale se utilizează schema lui Horner, căutînd întîi rădăcinile întregi ale ecuației. În cazul cînd s-a găsit o asemenea rădăcină α , avem deodată și cîtul împărțirii cu $x - \alpha$, cu care se continuă operația. Este util să se aplice schema lui Horner din observația din Cap. I. 4.1.3. După eliminarea rădăcinilor întregi, se procedează analog pentru toate rădăcinile posibile raționale.

Observații. 1° Numărul încercărilor se poate reduce calculînd în prealabil limitele rădăcinilor ecuației (§ 7).

2° În cazul căutării rădăcinilor întregi, putem să eliminăm acei divizori α ai lui a_n pentru care

$$\frac{f(1)}{\alpha - 1} \text{ și } \frac{f(-1)}{\alpha + 1}$$

nu sînt numere întregi, aceasta în cazul cînd $f(x)$ nu are rădăcini pe $+1$ sau pe -1 .

• 3° Cum încercarea numerelor raționale prin schema lui Horner este mai dificilă, se poate transforma ecuația (7) prin schimbarea $x = \frac{y}{a_0}$, care înmulțește toate rădăcinile cu numărul a_0 . Obținem

$$y^n + a_1 a_0 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} a_0^{n-2} y + a_n a_0^{n-1} = 0,$$

ale cărei rădăcini raționale sînt cu necesitate întregi. În cazul cînd după eliminarea rădăcinilor întregi, sau chiar de la început, primul coeficient este mai mare decât ultimul, este comod de a calcula inversele rădăcinilor prin transformata în $\frac{1}{x}$, pentru a avea coeficienți mai mici.

4° Dacă s-a găsit că un număr este rădăcină a unei ecuații, el trebuie încercat din nou în cîtul obținut, pentru că ar putea să fie vorba de o rădăcină multiplă.

Exemplu. 1° Ecuația

$$x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24 = 0,$$

poate avea rădăcinile întregi $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ și ± 24 . Cum $f(1) = -20, f(-1) = -42$, criteriul din Observația 2°, arată că mai trebuie încercați divizorii 2, 6, -3 și -4.

1	-2	-8	13	-24	2 nu
			$\frac{1}{2}$	-12	6 nu
			$\frac{9}{6}$	-4	-3 da
0	-1	5	-7	8	-4 nu
			$\frac{9}{4}$	-2	

deci singura rădăcină rațională este -3. Celelalte rădăcini sînt date de ecuația $x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = 0$.

2° Pentru ecuația

$$24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6 = 0,$$

trecem la transformata în $\frac{1}{x}$, deci facem schimbarea $x = \frac{1}{y}$

$$6y^5 - 5y^4 - 19y^3 - y^2 + 10y + 24 = 0$$

care poate avea rădăcinile întregi $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm 24$. Cum $f(1) = 15$ și $f(-1) = 11$ criteriul din Observația 2°, arată că trebuie să încercăm numai divizorii 2, -2, 4 și -4. Avem

6	-5	-19	-1	10	24	2 da
0	-6	-7	5	11	12	2 nu
			$\frac{17}{2}$	6		-2 nu
			$-\frac{5}{2}$	-6		4 nu
			$\frac{14}{4}$	3		-4 nu
			$\frac{3}{4}$	-2	-3	

Deci singura rădăcină întreagă este 2 (pentru ecuația inițială $\frac{1}{2}$), celelalte rădăcini fiind date de ecuația

$$6y^4 + 7y^3 - 5y^2 - 11y - 12 = 0.$$

Făcînd schimbarea $y = \frac{z}{6}$, avem

$$F(z) = z^4 + 7z^3 - 30z^2 - 396z - 2592 = 0.$$

Rădăcinile întregi ale acestei ecuații nu pot fi multipli de 6, căci ecuația în y ar avea atunci rădăcini întregi. Cum $2592 = 2^5 \times 3^4$ singurele rădăcini întregi posibile sînt $\pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 8, \pm 9, \pm 16, \pm 32$. Cum $F(1) = -3010$ și $F(-1) = -2232$, trebuiesc încercate numai numerele 2, 3, -4, 8 și -9. Avem

1	7	-30	-396	-2592	2 nu
	$-\frac{431}{2}$	-438	-846	-1296	3 nu
	$-\frac{143}{7}$	-150	-420	-864	-4 nu
		$\frac{93}{4}$	-63	648	8 da
0	-1	-15	-90	-324	8 nu
				$-\frac{324}{8}$	-9 da
	0	1	6	36	-9 nu
			$-\frac{2}{9}$	-4	

deci ecuația în z are rădăcinile 8 și -9, celelalte două rădăcini sînt complexe. Ecuația în y are rădăcinile $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ și $-\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$, iar ecuația în x , rădăcinile $\frac{3}{4}$ și $-\frac{2}{3}$. Deci ecuația dată are rădăcinile raționale $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ și $-\frac{2}{3}$ și două rădăcini complexe.

5. CALCULUL RĂDĂCINILOR MULTIPLE ALE UNEI ECUAȚII ALGEBRICE

Dacă polinomul $P(x)$ are rădăcina x , multiplă de ordinul m , derivata lui are aceeași rădăcină multiplă de ordinul $m - 1$.

Rezultă că rădăcinile multiple ale ecuației $P(x) = 0$ sînt rădăcinile c.m.m.d.c. dintre polinoamele $P(x)$ și $P'(x)$, ordinele lor fiind cu o unitate mai mare decît cele din c.m.m.d.c. Cîtul dintre polinomul $P(x)$ și c.m.m.d.c. dintre el și derivata lui, are aceleași rădăcini cu $P(x)$, dar toate simple.

Exemplu. Avem

$$P(x) = (x - 1)^3(x + 1)^2(x - 2)$$

$$P'(x) = 3(x - 1)^2(x + 1)(x^2 - 3x - 1).$$

C.m.m.d.c. al polinoamelor $P(x)$ și $P'(x)$ este $(x - 1)^2(x + 1) = x^3 - x^2 - x + 1$. Deci rădăcinile multiple ale lui $P(x)$ sînt $x = 1$ triplă și $x = -1$ dublă.

6. NUMĂRUL RĂDĂCINILOR REALE ALE UNEI ECUAȚII $f(x) = 0$

6.1. UTILIZAREA GRAFICULUI FUNCȚIEI $f(x)$

Rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ se găsesc la intersecția curbei de ecuație $y = f(x)$ cu axa Ox (graficul funcției $f(x)$) (Fig. 4.1).

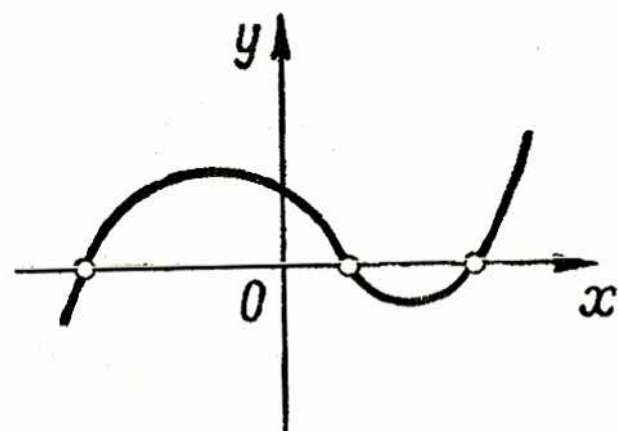


Fig. 4.1

Dacă acest grafic se poate construi, rezultă imediat numărul rădăcinilor reale ale ecuației precum și intervalele în care se găsesc. Dacă în intervalul (a, b) există o singură rădăcină a ecuației $f(x) = 0$, și dacă funcția $f(x)$ este continuă în acest interval, atunci $f(a)f(b) < 0$ (Fig. 4.2). Dacă $a < b$, se zice că a este o *aproximație prin lipsă*, iar b o *aproximație prin adaos* a rădăcinii α .

În cazul când graficul funcției $f(x)$ se construiește mai greu, scriem funcția $f(x)$ ca diferența a două funcții $f(x) = g(x) - h(x)$ și aflăm graficele celor două funcții. Abscisele punctelor de intersecție ne dau rădăcinile ecuației $f(x) = 0$ (Fig. 4.3).

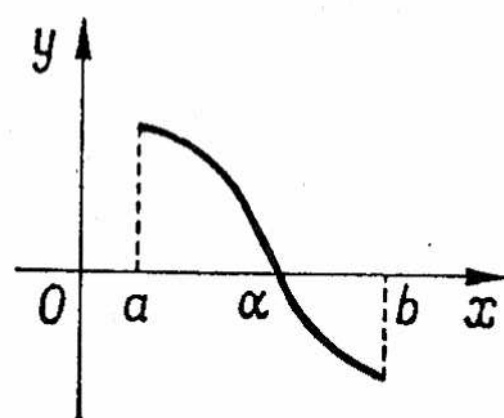


Fig. 4.2

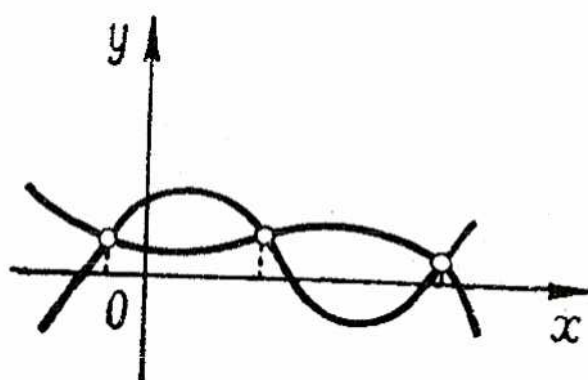


Fig. 4.3

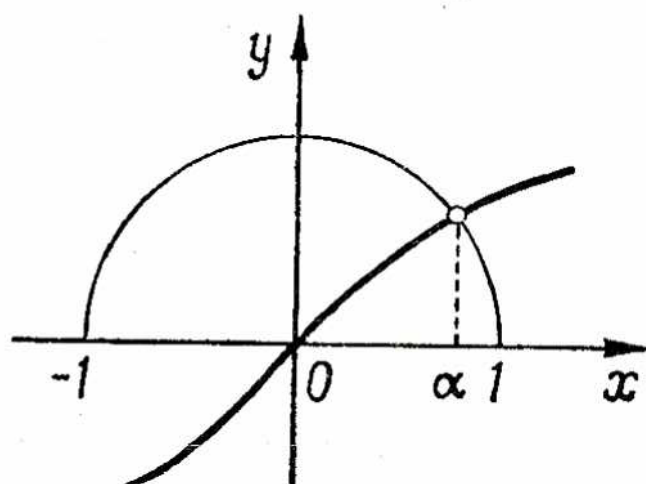


Fig. 4.4

E x e m p l u. Ecuația

$$\sqrt{1-x^2} - \sin x = 0$$

are o singură rădăcină reală cuprinsă între 0 și 1, după cum rezultă construind semicercul $y = \sqrt{1-x^2}$ și sinusoida $y = \sin x$ (Fig. 4.4).

6.2. ECUAȚII ALGEBRICE CU COEFICIENȚI REALI

Să notăm cu v numărul variațiilor de semn ce le prezintă coeficienții unei ecuații algebrice cu coeficienți reali.

6.2.1. Teorema lui Descartes

Numărul rădăcinilor reale și pozitive ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali este sau egal cu v sau cu $v - 2k$, unde $k = 1, 2, \dots$

Numărul rădăcinilor negative se obțin în același fel din transformata în $-x$. Se observă că teorema indică precis numărul rădăcinilor pozitive numai când $v = 1$ sau $v = 0$.

E x e m p l u. Ecuația

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 7 = 0$$

are patru variații, deci poate avea patru, două sau zero rădăcini pozitive. Transformata în $-x$

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 7 = 0$$

nu are nici o rădăcină pozitivă, deci ecuația inițială nu are nici o rădăcină negativă.

6.2.2. Teorema lui Sturm

Teorema dă numărul exact al rădăcinilor reale ale ecuației algebrice de grad n și fără rădăcini multiple, $f(x) = 0$, situate într-un interval (a, b) . În acest scop se formează *șirul lui Sturm*

$$(8) \quad f(x), f_1(x) = f'(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$$

unde $f_2(x)$ este restul schimbat de semn al împărțirii lui f cu f_1 și f_3 este restul schimbat de semn al împărțirii lui f_1 cu f_2 etc., deci

$$\begin{aligned} f &= f_1 q_1 - f_2 \\ f_1 &= f_2 q_2 - f_3 \\ &\dots \dots \\ f_{n-2} &= f_{n-1} q_{n-1} - f_n \end{aligned}$$

unde f_n este o constantă diferită de zero.

Teorema lui Sturm. Numărul rădăcinilor reale din intervalul (a, b) este egal cu diferența dintre numărul variațiilor de semn ale șirului (8) pentru b și a , deci $v(b) - v(a)$.

Observații. 1° Pentru a nu lucra cu coeficienți fracționari, ca și la algoritmul lui Euclid, deîmpărțitul, împărțitorul sau orice rest parțial poate fi înmulțit (sau împărțit) cu o constantă nenulă, aici însă, *neapărat pozitivă*.

2°. Se constată că obținerea polinoamelor din șirul (8) se face prin algoritmul lui Euclid, în care resturile sînt notate cu $-f_2, -f_3, \dots$. În cazul cînd polinomul $f(x)$ are și rădăcini multiple, se ajunge la un rest nul, atunci restul precedent este cel mai mare divizor comun $d(x)$ dintre polinom și derivată, ori atunci $f(x)/d(x)$ are numai rădăcini simple.

3°. Șirul lui Sturm se poate utiliza și ca metodă de separare a rădăcinilor (§ 8), deci pentru a găsi intervale în care nu există decît o singură rădăcină reală. Așa s-a procedat în exemplul de mai jos.

4°. Metoda duce în mod sigur la rezultat, dar în calcule pot apărea coeficienți mari.

Exemplu. Să se afle numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$f(x) \equiv x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 20x - 8 = 0.$$

Calculele se organizează în felul următor

	$x-1$	$2x+31$	$23x-457$
$x^4-2x^3-10x^2+20x-8$	$4x^3-6x^2-20x+20$	$23x^2-50x+22$	$33x-32$
$2x^4-4x^3-20x^2+40x-16$	$2x^3-3x^2-10x+10$	$759x^2-1650x+726$	
$-x^3-10x^2+30x-16$	$46x^3-69x^2-230x+230$	$-914x+726$	
$-2x^3-20x^2+60x-32$	$31x^2-274x+230$	$-457x+363$	
$-23x^2+50x-22$	$713x^2-6302x+5290$	$-15081x+11979$	
	$-4752x+4608$	-2645	
	$-33x+32$		

	$-\infty$	-4	-3	0	1	2	3	4	$+\infty$
$f = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 20x - 8$	+	+	-	-	+	-	-	+	+
$f_1 = 4x^3 - 6x^2 - 20x + 20$	-	-	-	+	-	-	+	+	+
$f_2 = 23x^2 - 50x + 22$	+	+	+	+	-	+	+	+	+
$f_3 = 33x - 32$	-	-	-	-	+	+	+	+	+
$f_4 = 2645$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Numărul de variații	4	4	3	3	2	1	1	0	0

Rezultă că avem câte o rădăcină reală în intervalele $(-4, -3)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ și $(3, 4)$, după cum se poate verifica și direct, căci

$$x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 20x - 8 = (x^2 + 2x - 4)(x^2 - 4x + 2).$$

7. LIMITAREA RĂDĂCINILOR ECUAȚIILOR ALGEBRICE

Prin această denumire se înțelege găsirea unei margini superioare a rădăcinilor reale.

Aceleași metode permit găsirea limitei inferioare a rădăcinilor pozitive și a limitei superioare și inferioare a rădăcinilor negative. În acest scop se fac transformatele în $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x}$ și $-x$ și dacă pentru ecuațiile obținute se găsesc limitele superioare ale rădăcinilor pozitive $\frac{1}{l}$, $-\frac{1}{l'}$ și $-L'$, limitele căutate sînt l , l' și L' .

7.1. METODA GRUPĂRII TERMENILOR

În cazul cînd polinomul se poate scrie

$$x^p(ax^2 + bx + c), \quad a > 0$$

și trinomialul de gradul al doilea este nenegativ (rădăcini complexe sau confundate), el este pozitiv pentru orice valoare pozitivă.

Dacă polinomul are primul coeficient pozitiv și o singură variație, el are o singură rădăcină pozitivă (Descartes), deci dacă pentru $x = c$ este pozitiv, c este o limită superioară a rădăcinilor pozitive.

Ținînd seama de cele două cazuri particulare, metoda constă în gruparea termenilor polinomului în polinoame, de felul celor de mai sus, și găsirea unui număr pozitiv care să le facă simultan pe toate pozitive.

Exemplu. 1°. $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 20x - 8 = (x^4 - 2x^3 - 10x^2) + (20x - 8) = 0$. Cele două polinoame au limitele 5 și 1, deci limita superioară este 5. Transformata în $-x$, $x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 20x - 8 = 0$ are limita superioară a rădăcinilor pozitive 4, deci limita inferioară a rădăcinilor negative este -4 .

7.2. METODA LUI LAGUERRE

Dacă pentru un polinom $P(x)$, toate polinoamele lui Laguerre, introduse în Cap. I, 4.1.3, sînt nenegative pentru $x = \alpha$, atunci α este o margine superioară a rădăcinilor pozitive ale polinomului $P(x)$, după cum rezultă din formula (3) din paragraful citat. Ori valorile acestor polinoame se găsesc pe ultima linie din schema lui Horner, corespunzătoare împărțirii cu $x - \alpha$. În aplicații se ia pe rînd pentru α numerele întregi 1, 2, ... și se oprește împărțirea de fiecare dată cînd se obține un număr negativ.

Exemple. Pentru transformatele în $\frac{1}{x}$ și $-\frac{1}{x}$ ale ecuației din exemplul precedent, avem

1	8	-20	10	2	-1
2	8	-12			
3	8	-4			
	8	4	22	68	203

1	8	20	10	-2	-1
	8	28	38	36	35

Limitele superioare sînt deci 3 și 1, așa că limita inferioară a rădăcinilor pozitive, respectiv limita superioară a rădăcinilor negative ale ecuației

$$x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 20x - 8 = 0$$

sînt $\frac{1}{3}$ și -1 , deci rădăcinile acestei ecuații sînt cuprinse în intervalele $(-4, -1)$ și $(\frac{1}{3}, 5)$.

8. SEPARAREA RĂDĂCINILOR

Se înțelege prin separarea rădăcinilor unei ecuații oarecare, găsirea unor intervale astfel ca fiecare să conțină numai cîte o rădăcină reală a ecuației date.

8.1. TEOREMA LUI STURM (§ 6.2.2)

permite, așa cum am arătat, separarea rădăcinilor reale ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali. În unele cazuri metoda care urmează se aplică mai ușor.

8.2. ȘIRUL LUI ROLLE

Fie ecuația algebrică sau transcendentă $f(x) = 0$, unde $f(x)$ este o funcție continuă în $[a, b]$ și derivabilă într-un interval (a, b) .

Pentru a separa rădăcinile reale ale acestei ecuații situate în intervalul (a, b) , se formează șirul lui Rolle

$$f(a), f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_k), f(b)$$

unde $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ sînt rădăcinile reale, situate în (a, b) , ale ecuației derivate $f'(x) = 0$. Dacă $f(\alpha_i)f(\alpha_{i+1}) < 0$, în intervalul (α_i, α_{i+1}) avem o singură rădăcină reală a ecuației $f(x) = 0$. Dacă $f(\alpha_i)f(\alpha_{i+1}) > 0$ în același interval nu avem nici o rădăcină a ecuației date.

Prin urmare la fiecare variație a șirului lui Rolle corespunde cîte o rădăcină a ecuației date. Dacă $f(\alpha_i) = 0$, α_i este rădăcină atît pentru ecuație cît și pentru ecuația derivată, deci este rădăcină multiplă a ecuației date. Dacă $f(\alpha_{i-1})f(\alpha_{i+1}) > 0$ respectiv < 0 , ordinul de multiplicitate a rădăcinii este par, respectiv impar. Dacă (a, b) este $(-\infty, +\infty)$, metoda permite separarea tuturor rădăcinilor reale ale ecuației.

Exemplu. Pentru ecuația $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$, avem $f'(x) = 3x^2 - 3$, cu rădăcinile -1 și $+1$. Se întocmește următorul tablou

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

deci avem trei rădăcini reale în intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ și $(1, +\infty)$.

Observații. 1° În cazul în care condițiile pentru funcția $f(x)$ nu sînt îndeplinite într-un număr finit de puncte din (a, b) șirul lui Rolle se aplică pentru subintervalele în care sînt îndeplinite condițiile de continuitate și derivabilitate.

2° Scrierea șirului Rolle impune cunoașterea rădăcinilor derivatei funcției $f(x)$. În cazul ecuațiilor algebrice, în general aceste rădăcini se află ușor numai pentru ecuațiile de gradul trei. Totuși, așa cum rezultă din exemplul de mai jos, se poate face și separarea rădăcinilor ecuațiilor de gradul patru.

Exemplu. Să se separe rădăcinile ecuației $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0$. Facem întâi schimbarea $x = y - 1$, avem ecuația

$$y^4 - 8y^2 + 8y - 2 = 0,$$

în care facem acum $y = \frac{1}{z}$. Găsim ecuația

$$2z^4 - 8z^3 + 8z^2 - 1 = 0$$

a cărei derivată are rădăcinile 0, 1 și 2. Din cauza ultimei schimbări șirul lui Rolle trebuie întocmit pentru intervalele $(-\infty, 0-)$ și $(0+, +\infty)$

$-\infty$	$0-$	$0+$	1	2	+
+	-1	-1	1	-1	+

Deci ecuația în z are rădăcinile în intervalele

$$(-\infty, 0-), (0+, 1), (1, 2), (2, +\infty),$$

ecuația în y le are în intervalele

$$(-\infty, 0), \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, +\infty),$$

iar ecuația dată, în intervalele

$$(-\infty, -1), \left(-1, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), (0, +\infty).$$

9. CALCULUL CU APROXIMAȚIE AL RĂDĂCINILOR REALE ALE UNEI ECUAȚII

Să presupunem că vrem să calculăm cu aproximație rădăcina reală și simplă α a ecuației $f(x) = 0$, cuprinsă într-un interval (a, b) în care nu există altă rădăcină, deci avem $f(a)f(b) < 0$. Afară de alte condiții pentru funcția $f(x)$ specifice metodelor de mai jos, vom presupune că $f(x)$ este continuă în (a, b) .

Metodele de calcul cu aproximație a rădăcinilor reale constau fie în găsirea unui șir de intervale, conținând pe α ,

$(a, b) \supset (a_1, b_1) \supset \dots \supset (a_n, b_n) \supset \dots$, așa ca $|a_n - b_n| \rightarrow 0$, când $n \rightarrow \infty$, fie în găsirea unui șir de numere

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

convergent cu limita α .

În primul caz pentru a avea rădăcina α cu o aproximație ε , procedeul trebuie oprit la acel n de la care încolo avem $|a_n - b_n| < \varepsilon$.

Pentru diferitele aproximații succesive (sau iterate succesive) x_n , se utilizează terminologia de *aproximație prin lipsă*, când $x_n < \alpha$, și *aproximație prin adaos*, când $x_n > \alpha$.

9.1. METODA ÎNJUMĂTĂȚIRII INTERVALULUI

Se calculează $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ și dacă $f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, rădăcina α se află în intervalul $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, iar în caz contrar în intervalul $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$.

Procedeul se continuă înjumătățind noul interval găsit (Fig. 4.5).

9.2. METODA CORZII

Una dintre cele două aproximații a și b ale rădăcinii α se înlocuiesc cu abscisa c a punctului de intersecție a corzii AB din graficul funcției $f(x)$, cu axa Ox (Fig. 4.6).

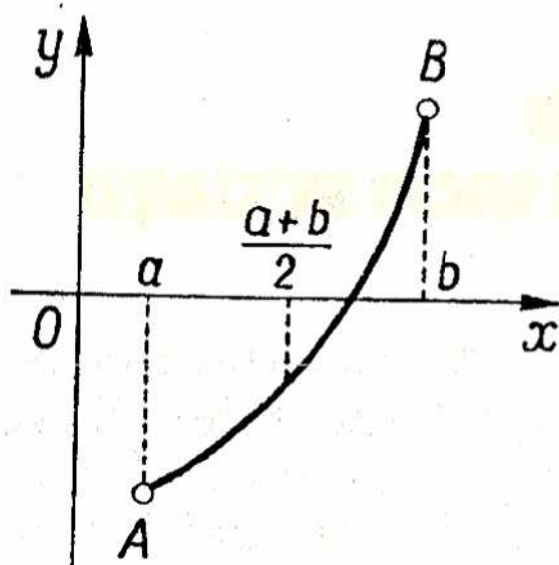


Fig. 4.5

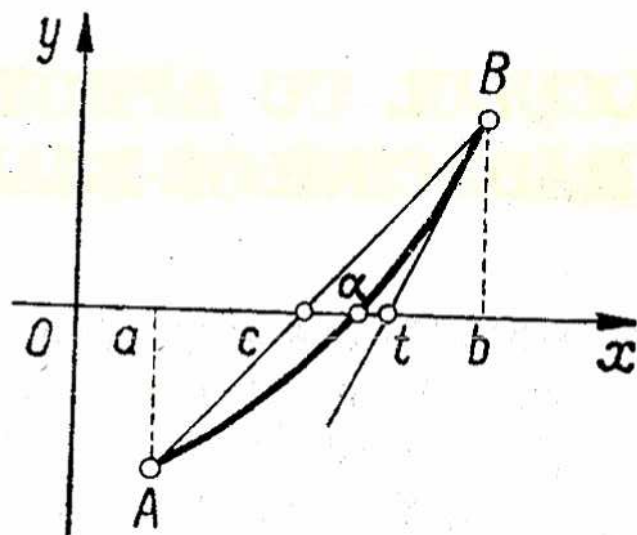


Fig. 4.6

Avem

$$c = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a) = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(b).$$

9.3. METODA TANGENTEI (NEWTON)

Ca nouă aproximație se ia abscisa t a punctului de intersecție a tangentei la curbă în A , respectiv în B , cu axa Ox (Fig. 4.6), adică

$$t = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \text{ sau } t = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Se presupune aici că funcția $f(x)$ este derivabilă în (a, b) .

Observație. Ultimele două metode se utilizează simultan una dînd aproximații prin lipsă și cealaltă aproximații prin adaos. Presupunînd că funcția $f(x)$ are derivate de primele două ordine și că ele păstrează un semn constant în (a, b) , metoda tangentei se aplică în acel capăt al intervalului în care $f(x)f''(x) > 0$.

9.4. METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE

Presupunînd că funcția $f(x)$ este derivabilă în intervalul (a, b) , în care ecuația $f(x) = 0$ are singura rădăcină α , se scrie ecuația sub forma

$$(9) \quad x = g(x)$$

(ceea ce se poate totdeauna, luînd $g(x) = f(x) + x$). Avem evident

$$\alpha = g(\alpha).$$

Luăm o valoare de pornire $x_0 \in (a, b)$, valoarea $g(x_0)$ nu va fi în general egală cu x_0 (în acest caz x_0 ar fi rădăcina căutată). Fie

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = g(x_{n-1}), \dots$$

S-a obținut în felul acesta șirul de numere

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$$

Dacă acest șir este convergent, limita lui este rădăcina α căutată. Șirul este convergent dacă

$$|g'(x)| \leq k < 1, \forall x \in (a, b).$$

Dacă această condiție este îndeplinită, avem

$$|x_n - x_{n-1}| < k^{n-1} (b - a)$$

deci convergența este cu atât mai rapidă cu cât numărul k este mai mic.

În cazul când $|g'(x)| > 1, \forall x \in (a, b)$, metoda se aplică pentru ecuația obținută din $x = g(x)$, explicitînd variabila x din funcția $g(x)$, deci

$$x = g^{-1}(x),$$

unde $g^{-1}(x)$ este funcția inversă a funcției $f(x)$. Se știe că în acest caz avem $|[g^{-1}(x)]'| < 1$ pentru orice $x \in (a, b)$.

Exemplu. Să se calculeze rădăcina ecuației $x = \frac{1}{1 + x^2}$.

Reprezentînd grafic (Fig. 4.7) funcțiile

$$y = x \text{ și } y = \frac{1}{1 + x^2}$$

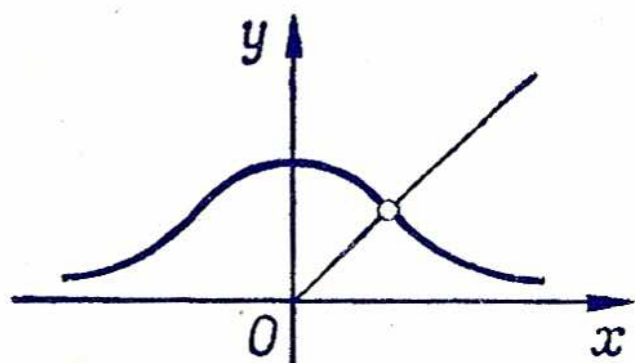


Fig. 4.7

constatăm că ecuația are o singură rădăcină pozitivă. Micșorînd intervalul găsim că rădăcina este cuprinsă în intervalul $(0,6; 0,7)$, în care

$$g'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$

este în valoare absolută subunitară. Luînd $x_0 = 0,7$, găsim $x_1 = 0,671$; $x_2 = 0,690$; $x_3 = 0,678$; $x_4 = 0,685$; $x_5 = 0,681$; $x_6 = 0,683$, deci, cu două zecimale exacte, rădăcina căutată este 0,68.

Observație. Metoda lui Newton, face parte din metoda aproximațiilor succesive căci ecuațiile

$$f(x) = 0 \text{ și } -\frac{f(x)}{f'(x)} = 0$$

au aceleași rădăcini. Pentru a doua, din

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

avem

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

În plus se poate arăta că ea este cea mai rapid convergentă dintre toate metodele de aproximații succesive curent utilizate.

Observație finală. În cazul când trebuie să se calculeze toate rădăcinile reale ale unei ecuații, sau numai unele dintre ele, după găsirea cu aproximație a rădăcinei α , celelalte rădăcini se obțin din ecuația

$$\frac{f(x)}{x - \alpha} = 0.$$

10. CALCULUL RĂDĂCINILOR COMPLEXE ALE ECUAȚIILOR ALGEBRICE CU COEFICIENȚI REALI

10.1. CALCULUL EXACT AL RĂDĂCINILOR COMPLEXE

Punînd în ecuația (2) $x = u + iv$, obținem ecuația

$$P(u, v) + iQ(u, v) = 0,$$

deci pentru ca x să fie rădăcină a ecuației (2), u și v trebuie să satisfacă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} P(u, v) = 0 \\ Q(u, v) = 0, \end{cases}$$

unde P și Q sînt polinoame cu coeficienți reali. Cum gradul acestui sistem este n^2 , rezolvarea lui nu se poate face decît în cazuri cu totul particulare.

10.2. CALCULUL CU APROXIMAȚIE AL RĂDĂCINILOR COMPLEXE

Ideea de bază a metodelor care urmăresc găsirea cu aproximație a rădăcinilor complexe ale unei ecuații algebrice cu coeficienți reali, constă în căutarea unor divizori trinoame de gradul doi cu coeficienți reali ai polinomului din ecuație. Desigur divizorii se calculează numai

cu aproximație. Trinoamele găsite nu au neapărat rădăcini complexe, ci pot avea și rădăcini reale. Simultan obținem și cîțul împărțirii și restul împărțirii (deoarece divizorul de gradul doi este calculat numai cu aproximație). Aproximația este socotită bună, atunci cînd coeficienții restului sînt mai mici decît un număr fixat dinainte. Se continuă procedeul asupra cîțului obținut, pînă cînd se obțin toate perechile de rădăcini, afară eventual de ultima rădăcină. Vom descrie mai jos una dintre aceste metode.

10.2.2. Metoda lui Barstow

Pentru polinomul

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

se presupune că divizorul ar fi $x^2 + p_0 x + q_0$, unde p_0 și q_0 sînt luați după voie. Valori mai bune ale celor doi coeficienți sînt

$$p_1 = p_0 + \Delta p_0, \quad q_1 = q_0 + \Delta q_0.$$

Pentru determinarea creșterilor Δp_0 și Δq_0 se face o împărțire a polinomului $f(x)$ cu $x^2 + p_0 x + q_0$

$$f(x) \equiv (x^2 + p_0 x + q_0)(b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \dots + b_{n-2}) + b_{n-1} x + b_n,$$

iar cu coeficienții b_i obținuți se formează un polinom de gradul n , care se împarte din nou cu $x^2 + p_0 x + q_0$

$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n \equiv (x^2 + p_0 x + q_0)(c_0 x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + \dots + c_{n-2}) + c_{n-1} x + c_n.$$

Ambele împărțiri se efectuează cu schema lui Horner generalizată (Cap. I. 4.1.3).

$x^2 + p_0 x + q_0$	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-3}	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
	$-p_0 b_0$	$-p_0 b_1$	$\dots$	$-p_0 b_{n-4}$	$-p_0 b_{n-3}$	$-p_0 b_{n-2}$		
		$-q_0 b_0$	$\dots$	$-q_0 b_{n-5}$	$-q_0 b_{n-4}$	$-q_0 b_{n-3}$	$-q_0 b_{n-2}$	
	$b_0 = a_0$	b_1	b_2	$\dots$	b_{n-3}	b_{n-2}	$\boxed{b_{n-1}}$	$\boxed{b_n}$
	$-p_0 c_0$	$-p_0 c_1$	$\dots$	$-p_0 c_{n-4}$	$-p_0 c_{n-3}$	$-p_0 c_{n-2}$		
		$-q_0 c_0$	$\dots$	$-q_0 c_{n-5}$	$-q_0 c_{n-4}$	$-q_0 c_{n-3}$	$-q_0 c_{n-2}$	
	$c_0 = b_0$	c_1	c_2	$\dots$	$\boxed{c_{n-3}}$	$\boxed{c_{n-2}}$	$\boxed{c_{n-1}}$	c_n

Creșterile se află din sistemul de două ecuații cu două necunoscute

$$\begin{cases} c_{n-2} \Delta p_0 + c_{n-3} \Delta q_0 = b_{n-1} \\ (c_{n-1} - b_{n-1}) \Delta p_0 + c_{n-2} \Delta q_0 = b_n \end{cases}$$

Se calculează noii coeficienți p_1 și q_1 și apoi procedeul se repetă.

Exemplu. Să se afle rădăcinile ecuației

$$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2 = 0.$$

Pornim cu trinomialul $x^2 + 1$

$x^2 + 1$	1	3	5	4	2
		0	0	0	0
			-1	-3	-4
	1	3	4	<u>1</u>	<u>-2</u>
		0	0	0	0
			-1	-3	-3
	1	<u>3</u>	<u>3</u>	<u>-2</u>	-5

$b_{n-1} = 1$, $b_n = -2$, $c_{n-3} = 3$, $c_{n-2} = 3$, $c_{n-1} = -2$. Găsim $\Delta p_0 = 0,5$; $\Delta q_0 = -0,167$. Noile valori ale coeficienților sînt $p_1 = 0 + 0,5 = 0,5$ și $q_1 = 1 - 0,167 = 0,833$. În continuare, se face o dublă împărțire a polinomului dat cu $x^2 + 0,5x + 0,83$. Avem

$x^2 + 0,5x + 0,83$	1	3	5	4	2
		-0,5	-1,25	-1,46	-0,23
			-0,83	-2,08	-2,62
	1	2,5	2,92	<u>0,46</u>	<u>-0,85</u>
		-0,5	-1,0	-0,55	
			-0,83	-1,66	
	1	<u>2,0</u>	<u>1,09</u>	<u>-1,75</u>	

Se găsește $\Delta p_1 = 0,40$; $\Delta q_1 = 0,02$, deci $p_2 = 0,90$ și $q_2 = 0,85$, deci o altă aproximație a divizorului căutat este $x^2 + 0,9x + 0,85$. Pentru comparare, menționăm că divizorul exact este $x^2 + x + 1$.

11. ECUAȚII NEALGEBRICE

Dacă în ecuația $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, funcția f este o funcție rațională de un număr de variabile și dacă unele dintre ele se înlocuiesc cu radicali de ordin întreg din expresii raționale, atunci avem o ecuație *irațională*. Dacă în locul radicalilor se introduc exponențiale sau logaritmi din expresii raționale, avem ecuații *exponențiale*, sau ecuații *logaritmice*. Analog avem ecuațiile *trigonometrice*, dar cu acestea nu ne vom ocupa.

11.1. ECUAȚII IRAȚIONALE

Nu există metodă generală pentru rezolvarea unor asemenea ecuații, de aceea vom menționa numai câteva metode, des utilizate, care permit reducerea lor la ecuații algebrice.

Metodele utilizate pentru raționalizarea numitorului unei fracții se pot utiliza pentru transformarea unor ecuații iraționale în ecuații algebrice, așa cum am observat în Cap. I. 6.3.

Astfel dacă ecuația este $P(x) = 0$, ea se poate înlocui cu ecuația $P(x)Q(x) = 0$, unde funcția $Q(x)$ este astfel aleasă încât produsul $P(x)Q(x)$ să fie o expresie algebrică rațională. În felul acesta noua ecuație are ca rădăcini și rădăcinile ecuației $Q(x) = 0$. De obicei funcția $Q(x)$ este conjugată funcției $P(x)$. Cel mai simplu caz este când ecuația se scrie $A(x) = B(x)$ și prin ridicare la o putere o parte, sau toți radicalii, dispar. De exemplu prin ridicarea la pătrat avem $A^2(x) = B^2(x)$, care are rădăcinile ecuației date, dar și cele ale ecuației $A(x) = -B(x)$.

De aceea este *obligatoriu* ca rădăcinile găsite să fie verificate în ecuația irațională dată. Dacă se fac una sau mai multe asemenea operații, nu întotdeauna se introduc alte rădăcini decât cele ale ecuației date, după cum se vede în exemplul de mai jos.

O altă metodă constă în alegerea unor substituții potrivite, care conduc la un sistem de ecuații raționale.

Câteva exemple vor ilustra aceste metode.

Exemple. 1° Să se rezolve ecuațiile

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} &= 1, & \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{1-x}} &= 1, \\ \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{1-x}} &= 1.\end{aligned}$$

Izolând radicalii suprapuși și ridicând succesiv de trei ori la pătrat, se ajunge la aceeași ecuație $x(25x - 16) = 0$ cu rădăcinile 0 și $\frac{16}{25}$. Prima ecuație admite numai rădăcina $\frac{16}{25}$, a doua ecuație admite rădăcina 0, iar ultima pe niciuna.

2° Pentru ecuația

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{x^2 - 1},$$

împărțind peste tot cu $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ ($x=1$ nu este rădăcină a ecuației) și notînd

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = y$$

ajungem la o ecuație de gradul doi în y .

3° În ecuația

$$\sqrt[4]{8-x} + \sqrt[4]{89+x} = 5,$$

punînd $8-x = a^4$ și $89+x = b^4$, ajungem la sistemul de ecuații raționale $a+b=5$, $a^4+b^4=97$.

11.2. ECUAȚII EXPONENȚIALE ȘI LOGARITMICE

Nu există metode generale pentru rezolvarea unor asemenea ecuații. De aceea procedeele utilizate constau fie în căutarea unor substituții care să conducă la ecuații algebrice, fie în anumite transformări cu scopul de a ajunge la egalitatea a două exponențiale, sau a doi logaritmi, cu aceeași bază pozitivă și diferită de unitate. Pentru toate celelalte ecuații, se aplică metodele de calcul cu aproximații a rădăcinilor reale, ca de exemplu metoda aproximațiilor succesive.

12. INECUAȚII CU O SINGURĂ VARIABILĂ

Rezolvarea inecuațiilor cu o singură variabilă este strîns legată de rezolvarea ecuațiilor obținute înlocuind semnul de inegalitate cu cel de egalitate. În adevăr, dacă inecuația este de exemplu $P(x) > 0$,

unde $P(x) \equiv a_0(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_k)^{\alpha_k}$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ numere naturale, mulțimea valorilor x care satisfac inecuația se găsește examinând semnul factorilor în care este descompus polinomul $P(x)$. În calculele făcute asupra inecuațiilor trebuie să se țină seama de proprietățile inecuațiilor și în special de faptul că o inecuație nu se poate înmulți sau împărți cu un factor care nu are un semn constant. Mai trebuie menționat că inecuațiile

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} > 0, \quad P_1(x)P_2(x) > 0$$

sînt echivalente.

Cap. V. Determinanți

1. GENERALITĂȚI

Fie tabloul pătrat de numere

$$(1) \quad \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

unde elementele s-au notat cu aceeași literă cu doi indici, primul arătând linia, iar al doilea coloana în care se găsește în tablou elementul.

Se numește *determinant* al elementelor din tabloul (1) suma tuturor produselor de câte n factori, astfel ca doi factori să nu fie din aceeași linie și nici din aceeași coloană și înmulțind fiecare produs cu $+1$ sau cu -1 , după cum permutările indicilor liniilor și coloanelor sînt de aceeași clasă sau de clase contrarii.

Elementele tabloului se zic și *elementele determinantului*. Notăția utilizată pentru determinantul tabloului (1) se obține mărginindu-l cu două bare laterale, sau uneori mai scurt, cu o singură literă. Avem deci

$$(2) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{I_1 + I_2} a_{\alpha_1 \beta_1} a_{\alpha_2 \beta_2} \dots a_{\alpha_n \beta_n},$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ sînt două permutări oarecare ale primelor n numere naturale care au I_1 , respectiv I_2 , inversiuni. Semnul sumă arată că în locul acestor permutări se pun pe rînd toate permutările numerelor naturale $1, 2, \dots, n$ și apoi se face suma termenilor obținuți.

Cum fiecare termen al determinantului nu se schimbă când schimbăm factorii între ei, formula de definiție se poate scrie

$$(3) \quad D = \sum \varepsilon a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n},$$

unde factorii fiecărui termen au fost ordonați în ordinea naturală a liniilor. ε este egal cu $+1$ sau -1 , după cum permutarea $k_1 k_2 \dots k_n$ a numerelor naturale $1, 2, \dots, n$ este de clasă pară, sau de clasă impară. Semnul Σ înseamnă că în locul permutării $k_1 k_2 \dots k_n$ se pun pe rînd toate cele $n!$ permutări ale numerelor naturale precedente, se determină de fiecare dată valoarea lui ε și se face suma acestor termeni.

Rezultă că în dezvoltarea determinantului D avem $n!$ termeni, dintre care jumătate au înainte semnul plus, iar jumătate semnul minus, pentru că sînt tot atîtea permutări de clasă pară ca și de clasă impară. Din regula precedentă deducem că în fiecare termen al determinantului există un singur element din fiecare linie și din fiecare coloană.

Un determinant se zice de *ordinul* n , dacă are n linii și n coloane.

Elementele determinantului care au indici egali se zic că se află pe *diagonala* determinantului. Produsul acestor elemente formează *termenul principal* al determinantului și pentru el avem $\varepsilon = 1$. Termenii $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$ se zic că se află pe *contradiagonala* determinantului.

Regula de dezvoltare a unui determinant de ordinul doi este dată de formula

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

adică din termenul principal se scade produsul elementelor de pe contradiagonală.

Pentru determinantul de ordinul trei avem *regula lui Sarrus*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

deci sub determinant se mai scriu încă o dată primele două linii. Termenii cu plus înainte sînt termenul principal și încă doi termeni cu elemente situate pe două paralele la diagonala determinantului. Cei trei termeni cu minus înainte au elementele pe contradiagonală și pe două paralele cu aceasta.

O a doua regulă constă în schema alăturată (Fig. 5.1), deci

termenii cu semnul plus înainte sînt termenul principal și doi termeni ai căror elemente sînt în vîrfurile a două triunghiuri cu una dintre laturi paralelă cu diagonala principală. Termenii cu semnul minus înainte se obțin printr-un procedeu analog, diagonala determinantului fiind înlocuită cu contradiagonală.

Pentru determinanții de ordin mai mare decît trei, orice regulă de dezvoltare ar fi foarte complicată, de aceea calculul lor se face reducîndu-i la determinanți de ordinul doi sau trei.

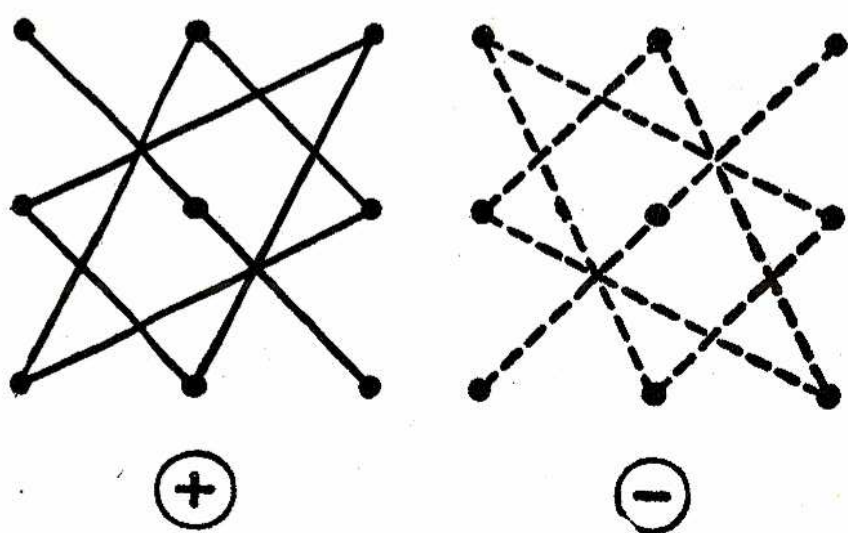


Fig. 5.1

2. PROPRIETĂȚILE DETERMINANȚILOR

Un determinant rămîne nemodificat prin schimbarea liniilor în coloane și a coloanelor în linii.

Corolar: orice proprietate valabilă pe liniile unui determinant este valabilă și pe coloanele lui.

Dacă toate elementele unei linii dintr-un determinant sînt nule, determinantul este nul.

Schimbînd într-un determinant două linii între ele, se obține un determinant opus primului.

Corolar: un determinant cu două linii egale (elementele corespunzătoare din cele două linii sînt egale) este nul.

Înmulțind elementele unei linii dintr-un determinant cu o constantă, determinantul se înmulțește cu acea constantă.

Determinantul nu se schimbă dacă la elementele unei linii, se adaugă elementele corespunzătoare ale altei linii înmulțite cu o constantă.

Un determinant în care elementele liniei de rang r sînt sume de un același număr k de termeni, este egal cu suma a k determinanți care au aceleași elemente ca și determinantul inițial, afară de linia de rang r în care pe rînd se pun primii termeni din sumă, ai doilea termeni ai sumelor, ..., ai k -lea termeni ai sumelor.

Astfel de exemplu avem

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 & c_1 + c_2 + c_3 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

3. DETERMINANȚI MINORI

Suprimînd într-un determinant de ordinul n elementele unei linii și ale unei coloane și păstrînd ordinea elementelor rămase, obținem un alt determinant de ordinul $n-1$, numit *determinant minor* corespunzător elementului aflat în linia și coloana suprimată.

Dacă determinantul este notat cu D , atunci de obicei minorul corespunzător elementului a_{ik} se notează cu D_{ik} . Astfel pentru determinantul (2), minorul corespunzător elementului a_{11} este

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Se numește *complement algebric* corespunzător elementului algebric a_{ik} al determinantului D , expresia

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} D_{ik}.$$

Se constată că pentru elementele diagonalei principale, complementele algebrice coincid cu minorii corespunzători. Pentru celelalte complemente semnul $(-1)^{i+k}$ se poate determina din schema de mai jos (întocmită pentru simplificare pentru un determinant de ordinul patru)

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{array}$$

Se numește *determinant reciproc* al unui determinant dat D , determinantul format cu complementele algebrice ale acestuia, adică

$$D^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Se arată că $D^* = D^{n-1}$.

Cu ajutorul acestor noțiuni, avem dezvoltarea unui determinant după elementele liniei de rang h

$$(4) \quad D = a_{h1}A_{h1} + a_{h2}A_{h2} + \dots + a_{hn}A_{hn},$$

deci calculul valorii unui determinant se reduce la calcularea a n determinanți de ordinul $n-1$.

Aplicînd succesiv această regulă, se poate ajunge la calcularea unui determinant cu ajutorul determinanților de ordinul trei sau doi.

Este important de observat în formula precedentă, că dacă toate elementele liniei de rang h sînt nule afară de unul singur, calculul determinantului de ordinul n se reduce la calculul unui singur determinant de ordinul $n-1$.

Ținînd seama de aceasta, înainte de a aplica formula (4), utilizînd proprietățile determinanților, se caută ca pe o linie, sau pe o coloană, să se facă toate elementele nule, afară de unul.

Exemplu. Avem succesiv

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \\
 = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 10 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & -11 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 19 \end{vmatrix} = 45.$$

Noțiunile precedente se pot generaliza. Și anume, suprimând s linii și s coloane dintr-un determinant de ordinul n și păstrând ordinea elementelor rămase, obținem un *determinant minor de ordinul $n-s$* , corespunzător unui alt determinant minor de ordinul s ale cărui elemente se găsesc la intersecția liniilor și coloanelor șterse. Dacă liniile și coloanele șterse au rangurile $i_1, i_2, \dots, i_s$, respectiv $j_1, j_2, \dots, j_s$, acest ultim minor se notează cu

$$D_{i_1, i_2, \dots, i_s}^{j_1, j_2, \dots, j_s}.$$

În particular, determinanții minori care au diagonala principală formată din elemente de pe diagonala principală a determinantului inițial, se numesc *determinanți minori principali*, pe scurt *minori principali*.

Avem dezvoltarea determinantului D , după elementele primelor s linii

$$D = \sum (-1)^m D_{1, 2, \dots, s}^{p_1, p_2, \dots, p_s} D_{s+1, s+2, \dots, n}^{p_{s+1}, p_{s+2}, \dots, p_n}$$

unde $p_1, p_2, \dots, p_n$ este o permutare oarecare a numerelor naturale $1, 2, \dots, n$. Termenul general este produsul a doi determinanți minori unul corespunzător celuilalt. Factorul $(-1)^m$ se obține calculând câte schimbări de semn ar trebui făcute pentru a aduce coloanele de rang $p_1, p_2, \dots, p_s$ în primele s coloane. Semnul Σ se referă la suma tuturor produselor de doi minori corespunzători ce se pot forma, primul fiind din primele s linii ale determinantului inițial. Sînt deci C_n^s asemenea produse. Pentru a dezvolta un determinant după s linii oarecare ale lui, se aduc întîi aceste linii în primele s .

E x e m p l u. Să se dezvolte determinantul

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

după ultimele două linii. Avem

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \\ &- \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 665. \end{aligned}$$

4. DETERMINANȚI PARTICULARI

În cazul când elementele unui determinant prezintă anumite particularități, este de așteptat ca el să aibă proprietăți speciale. Interesează în mod deosebit acei determinanți pentru care se poate scrie direct valoarea lor, așa cum s-a întâmplat mai sus cu determinanții reciproci.

Un determinant se numește *triunghiular*, dacă toate elementele situate sub, sau deasupra diagonalei principale, sau contradiagonalei, sînt nule. Valoarea unui asemenea determinant este în primul caz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$$

iar în al doilea caz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}.$$

Un determinant se numește *simetric* dacă avem $a_{ik} = a_{ki}$ pentru $i, k = 1, 2, \dots, n$ și *antisimetric* dacă $a_{ik} = -a_{ki}$; $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Denumirile provin din aceea că elementele simetric așezate față de diagonala principală sînt egale în primul caz și opuse în al doilea caz. În cazul unui determinant antisimetric toate elementele de pe diagonala principală sînt nule. Determinanții antisimetrici de ordin impar sînt nuli, iar cei de ordin par sînt pătrate perfecte.

Exemple. Avem

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2.$$

Se zice că un determinant este de tip *Vandermonde*, atunci cînd elementele liniei de rang k sînt puterile $k-1$ ale unor elemente oarecare. Notăția și valoarea unor asemenea determinanți este

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \dots \dots (x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}).$$

deci el este egal cu produsul tuturor diferențelor distincte de forma $x_i - x_j$, $i > j$ și $i = 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Exemplu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 1 \\ 8 & -1 & 27 & 1 \end{vmatrix} = (-1-2)(3-2)(1-2)(3+1)(1+1)(1-3) = -48.$$

5. ÎNMULȚIREA DETERMINANȚILOR

Pentru cazul cînd elementele determinanților nu sînt numere, sau pentru anumite probleme teoretice, este utilă o regulă pentru construirea determinantului produs a doi determinanți de același ordin.

Fie determinanții

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

Dacă avem

$$AB = C,$$

atunci elementele determinantului C se formează cu ajutorul elementelor determinanților A și B , după regula

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \dots + a_{in}b_{kn}; \quad i, k = 1, 2, \dots, n$$

deci elementul c_{ik} , din linia i și coloana k , din determinantul C , se obține înmulțind elementele din linia i ale lui A cu elementele corespunzătoare din linia k ale lui B (Fig. 5.2).

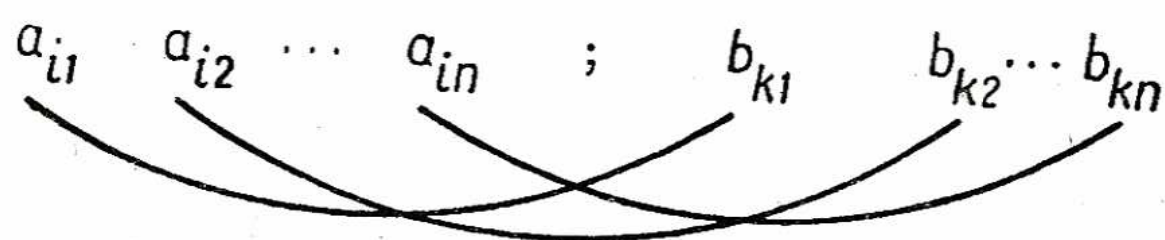


Fig. 5.2

Regula precedentă poartă denumirea de *înmulțire linii pe linii*. Cum însă un determinant nu se schimbă cînd se schimbă liniile în coloane, avem reguli analoage de *înmulțire linii pe coloane*

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}; \quad i, k = 1, 2, \dots, n,$$

sau încă două: *înmulțirea coloane pe linii* sau *înmulțirea coloane pe coloane*.

Cap. VI. Matrice

1. GENERALITĂȚI

Se numește *matrice* un sistem de mn elemente (reale sau complexe) așezate într-un tablou dreptunghiular și notăm

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ik}],$$

elementele fiind reprezentate cu aceeași literă cu doi indici, primul arătând linia și al doilea coloana în care se află.

Ultima notație este uneori însoțită de menționarea valorilor luate de indicii i și k (În unele cărți parantezele drepte sînt înlocuite cu paranteze rotunde sau cu bare laterale duble).

Cele două numere m și n (numărul liniilor și al coloanelor matricei (1)) poartă denumirea de *dimensiunile matricei* și pentru prescurtare se spune: „matrice A de dimensiuni m/n ”. Astfel pentru matricele următoare, dimensiunile sînt trecute sub fiecare dintre ele

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad [1 \ 4 \ -1 \ 2]; \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

3/2 1/4 3/1 3/3

Matricele cu o singură linie, sau cu o singură coloană, se numesc *matrice-linie*, respectiv *matrice-coloană*.

Acestora li se spune uneori și *vectori*, pentru că ele au proprietăți analoage cu ale vectorilor din spațiul cu trei dimensiuni. În general matricele-coloană (sau linii) cu n linii (n coloane) formează un spațiu de vectori (spațiu vectorial) n -dimensionali.

Matricele de dimensiuni n/n se numesc *matrice pătrate*, precizându-se că sînt de *ordin* n .

Se numește *diagonală* a unei matrice dreapta care trece prin elementele aflate la intersecția unei linii și a unei coloane de același rang. Ea nu coincide în general cu diagonală tabloului dreptunghiular.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ & 1 & -3 & 1 & 0 \\ & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Se numește *matrice nulă* și se notează cu $[0]$, sau dacă nu este confuzie cu 0 , matricea care are toate elementele nule.

Matricea nulă poate avea orice dimensiuni.

Se numește *matrice transpusă* a matricei (1), matricea A^t de dimensiuni n/m obținută schimbînd liniile în coloane și coloanele în linii, deci

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Mai jos sînt arătate diferite cazuri particulare de matrice pătrate

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

matrice matrice
triunghiulară sus triunghiulară jos

$$\text{diag } [a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ matrice diagonală};$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \text{ matrice unitate de ordinul } n;$$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n |a_{ik}|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ matrice diagonal dominantă.}$$

Se numește *matrice reciprocă* (sau *adjunctă*) a matricei **A** de ordin n , matricea

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

formată cu complementele algebrice A_{ij} ale elementelor a_{ij} din matricea **A** și în care s-au schimbat liniile cu coloanele.

Prin *partiționarea unei matrice* se înțelege împărțirea ei, prin drepte paralele cu liniile și drepte paralele cu coloanele ei, în *submatrice* (*celule*, sau *blocuri*) de dimensiuni mai mici.

Se obține astfel o *matrice cu blocuri*, în care elementele sînt la rîndul lor matrice. Astfel de exemplu avem

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1s} & a_{1,s+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rs} & a_{r,s+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,s} & a_{r+1,s+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{ms} & a_{m,s+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix},$$

blocurile **B**, **C**, **D** și **E** avînd dimensiunile r/s , $r/n-s$, $m-r/s$, $m-r/n-s$.

Un caz particular este atunci cînd matricea **A** este pătrată și cînd matricele de pe diagonala ei principală $A_1, A_2, \dots, A_k$ sînt de asemenea matrice pătrate, iar celelalte sînt matrice nule. Se zice că matricea este *cvasidiagonală* și scriem

$$\Delta = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & & & \\ \hline & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{array} \right] = \text{diag } [A_1, A_2, \dots, A_k].$$

2. OPERAȚII CU MATRICE

Două *matrice* de aceleași dimensiuni se zic *egale*, cînd elementele corespunzătoare sînt egale.

Astfel dacă

$$\mathbf{A} = [a_{ij}], \mathbf{B} = [b_{ij}]; i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

din $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, rezultă $a_{ij} = b_{ij}$, pentru toate valorile indicilor i și j .

Prin *suma a două matrice* $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$, de aceleași dimensiuni m/n , notație $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, se înțelege o nouă matrice $\mathbf{C}$ de dimensiuni m/n , ale cărei elemente sînt suma elementelor corespunzătoare din cele două matrice $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$, deci $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, pentru orice i și j .

Pentru aceleași matrice $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$, se definește matricea diferență $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, care are elementele $a_{ij} - b_{ij}$.

Prin *produsul unei matrice* $\mathbf{A}$ cu *scalarul* (numărul) α , se înțelege o nouă matrice obținută din $\mathbf{A}$, prin înmulțirea tuturor elementelor ei cu scalarul α .

Astfel, pentru matricea (1), avem

$$\alpha \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Avem următoarele proprietăți

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{ (comutativitate),}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) \text{ (asociativitate),}$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\mathbf{A} &= \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \\ \alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(distributivitate a înmulțirii cu un scalar,} \\ \text{față de adunare),} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}, \mathbf{A} - \mathbf{0} = \mathbf{A}, \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0},$$

unde matricele $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ sînt de dimensiuni m/n , iar α, β sînt scalari.

Produsul a două matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix},$$

de dimensiuni m/n , respectiv n/p , este o nouă matrice

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

de dimensiuni m/p , în care elementul c_{ij} se obține făcând suma produselor elementelor din linia i din matricea **A**, cu elementele corespunzătoare din coloana j din matricea **B**, adică

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

$$i = 1, 2, \dots, m \text{ și } j = 1, 2, \dots, p$$

și notăm

$$C = AB$$

$$m/p \quad m/n \quad n/p$$

deci numărul coloanelor matricei **A** trebuie să fie egal cu numărul liniilor matricei **B**.

Două matrice care nu îndeplinesc aceste condiții *nu se pot înmulți*. De aceea produsul a două matrice nu este comutativ, chiar dacă cele două produse se pot efectua (ambele matrice sînt pătrate și de același ordin). Așa fiind, trebuie precizat că se înmulțește matricea **A** *la stînga* (sau *la dreapta*) cu matricea **B**. În cazul cînd avem $AB = BA$, matricele se zic *permutabile*.

Produsul matricelor satisface următoarele proprietăți

$$(AB)C = A(BC) \text{ (asociativitate),}$$

$$(A + B)C = AC + BC \text{ (distributivitate față de adunare),}$$

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \text{ (asociativitate),}$$

$$AI = IA = A,$$

$$(AB)^t = B^t A^t,$$

unde matricele **A**, **B**, **C** și **I** au dimensiuni astfel ca produsele să se poată efectua, iar α este un scalar.

Se poate defini *puterea de rang p* a unei matrice pătrate **A**, prin

$$A^p = \underbrace{AA \dots A}_{p \text{ ori}}, \quad A^0 = I_n$$

și avem

$$\mathbf{A}^p \mathbf{A}^q = \mathbf{A}^{p+q}, (\mathbf{A}^p)^q = \mathbf{A}^{pq}$$

și formula binomului

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^p = \sum_{i=0}^p C_p^i \mathbf{A}^{p-i} \mathbf{B}^i.$$

Față de operațiile de adunare și înmulțire, matricele de același ordin formează un inel cu element unitate (matricea unitate) și cu divizori ai lui zero. Astfel de exemplu avem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemple

$$\begin{aligned} 1^\circ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}_{3/2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{2/3} &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1)(-2) & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & -9 & 22 \end{bmatrix}_{3/3} \end{aligned}$$

2° Dacă

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ și } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

avem

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}_{m/1}.$$

Produsul $\mathbf{XA}$ nu există decât dacă $m = n = 1$.

3° Pentru matricele

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

avem

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

4° Pentru matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

avem

$$\mathbf{AI}_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$

Analog $\mathbf{I}_2\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Observații. 1° Suma și produsul a două matrice triunghiulare de același ordin și tip (ambele triunghiulare sus, sau triunghiulare jos) este o matrice de același tip.

2° Operațiile definite mai sus se extind și pentru matricele cu blocuri.

3. MATRICEA INVERSĂ

Fiecărei matrice pătrate $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de ordin n , i se atașează un determinant care se notează $|\mathbf{A}|$, sau $\det \mathbf{A}$ și care se numește *determinantul matricei A* și avem

$$|\mathbf{A}| = |a_{ij}|; \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Rezultă imediat că determinantul unei matrice triunghiulare (și cu atât mai mult pentru o matrice diagonală) este egal cu produsul elementelor de pe diagonala ei principală. În particular, determinantul oricărei matrice unitate este egal cu unitatea. Mai general, determinantul unei matrice cvasidiagonale este egal cu produsul determinantelor matricelor de pe diagonală.

O matrice pătrată se numește *nesingulară*, dacă determinantul asociat ei este diferit de zero și se numește *singulară* în caz contrar.

Astfel de exemplu, matricele

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ și } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

sînt prima singulară, iar a doua nesingulară. O matrice diagonală este nesingulară numai dacă toate elementele ei de pe diagonală sînt nenule.

Se numește *matrice inversă* a unei matrice *nesingulare* A de ordin n și se notează cu A^{-1} , o nouă matrice de același ordin cu A și așa ca

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

(Subliniem că numai matricele nesingulare, au matrice inversă).

Matricea inversă se calculează cu formula

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} \text{ și } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, \text{ căci } |A|^* = |A|^{n-1}.$$

Avem proprietățile

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

Exemplu. Pentru matricea nesingulară

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad |A| = 7,$$

avem

$$\begin{aligned} A_{11} &= -7, & A_{12} &= 4, & A_{13} &= 2 \\ A_{21} &= 7, & A_{22} &= -5, & A_{23} &= 1 \\ A_{31} &= 7, & A_{32} &= -2, & A_{33} &= -1 \end{aligned}$$

deci

$$A^* = \begin{bmatrix} -7 & 7 & 7 \\ 4 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

1. RANGUL UNEI MATRICE

Se numește *rang* al unei matrice, ordinul maxim al determinanților nenuli, ce se pot forma din matrice prin suprimări de linii și coloane și păstrarea ordinii elementelor rămase.

Matricele de aceleași dimensiuni și care au același rang se numesc *rațional echivalente* și între ele se trece semnul $\cong$. Operațiile care păstrează rangul unei matrice se numesc *transformări elementare* și sînt următoarele:

- 1° înmulțirea unei linii cu un factor nenul,
- 2° schimbarea între ele a două linii,
- 3° adunarea unei linii înmulțită cu o constantă, la altă linie.

De asemenea operațiile analoage pe coloane (Se poate arăta că transformarea 2° poate fi obținută cu ajutorul transformărilor 1° și 3°).

Ținînd seama că pentru o matrice diagonală rangul este egal cu numărul elementelor nenule de pe diagonală, pentru găsirea rangului unei matrice se caută ca ea să fie adusă la o matrice rațional echivalentă, cu toate elementele nule, afară de unele de pe diagonală. În acest scop, dacă în matricea $A = [a_{ik}]$, $i = 1, 2, \dots, m$ și $k = 1, 2, \dots, n$, avem $a_{11} \neq 0$, înmulțim prima linie cu $\frac{1}{a_{11}}$ și în locul elementului a_{11} apare elementul 1. Înmulțind apoi linia întâia, astfel transformată, succesiv cu $-a_{21}$, $-a_{31}$, $\dots$, $-a_{m1}$ și adăugînd-o la linia a 2^a, a 3^a, $\dots$, a m^a , obținem elemente nule pe prima coloană, afară de primul, egal cu unitatea. În continuare, procedînd analog se formează elemente nule pe prima linie și avem

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Apoi dacă $b_{22} \neq 0$ se fac elemente nule pe linia și coloana a 2^a etc.

Elementele nenule a_{11} , b_{22} , $\dots$ cu care s-au făcut elemente nule, poartă denumirea de *elemente pivot*.

În cazul cînd $a_{11} = 0$, presupunînd că prima linie are un element $a_{1j} \neq 0$, se aduce acesta în locul lui a_{11} , prin schimbarea între ele a coloanelor de rang 1 și j . Dacă toate elementele de pe prima linie

sînt nule, ele se lasă așa și se trece la elementul următor de pe diagonală, cu care (dacă $a_{22} \neq 0$) se fac elemente nule pe linia și coloana a 2^a.

E x e m p l u

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -5 & 17 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -14 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{rang } 2.$$

Observații. 1° Odată cu determinarea rangului p al unei matrice, din matricea inițială se poate obține și un determinant de ordinul p diferit de zero. În adevăr, dacă nu s-a utilizat transformarea elementară 2° (schimbarea între ele a două linii, sau două coloane), elementele determinantului căutat se găsesc la intersecția liniilor și coloanelor din matricea finală, care conțin elementele nenule. În cazul cînd s-au făcut schimbări de linii și coloane, se ține seama de ele (În mod evident, din matricea inițială s-ar putea să se formeze și alți determinanți diferiți de zero și de ordinul p).

2° Pentru determinarea ușoară a rangului, matricea rezultată nu trebuie să fie neapărat diagonală. Este suficient ca ea să conțină pe fiecare linie și coloană, cel mult un element diferit de zero. Rangul matricei este atunci egal cu numărul elementelor diferite de zero, ceea ce se vede ușor utilizînd în mod potrivit transformarea a 2°. Observația este importantă, în special pentru că drept element pivot se poate alege oricare dintre elementele matricei, deci pentru ușurarea calculelor acestea se aleg fie $+1$, fie -1 . Dacă asemenea elemente nu sînt în matrice, ele se pot forma, prin transformări elementare.

3° Anumite probleme pot cere ca, pentru determinarea rangului, să se lucreze numai pe linii. În acest caz, odată ales un pivot, se fac elemente nule pe coloana lui, atît sub el cît și deasupra lui. Alegerea pivotilor se face după următoarea regulă: se alege ca pivot un element nenul din linia întîia și cu el se fac elemente nule pe coloana lui. Dacă toate elementele liniei întîia sînt nule, ea se trece ca ultimă linie. Din linia a doua se alege ca pivot un alt element nenul (el nu mai poate fi pe aceeași coloană ca pivotul precedent) și cu el se fac elemente nule pe coloana lui. Continuînd acest procedeu, se

ajunge la o matrice al cărui rang este evident egal cu numărul pivoților astfel aleși.

Exemplu. Avem succesiv

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -5 & 17 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -14 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cong$$

$$\cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

deci rangul este doi.

5. TIPURI DE MATRICE PĂTRATE

Matricea $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, se zice *simetrică*, dacă pentru orice i și j avem $a_{ij} = a_{ji}$ și *antisimetrică* dacă $a_{ij} = -a_{ji}$. Pentru acestea din urmă avem $a_{ii} = 0$, pentru orice i . O matrice se numește *ortogonală*, dacă $AA^t = I_n$. În acest caz determinantul ei este $+1$, sau -1 , iar elementele ei satisfac $\frac{n(n+1)}{2}$ condiții. Pentru matricele

cu elemente complexe, aceste noțiuni se generalizează în felul următor. Se numește *matrice conjugată* a matricei A , matricea $\bar{A} = \bar{a}_{ij}$, formată cu conjugatele elementelor matricei A . O matrice se numește *hermitică*, dacă pentru orice i și j avem $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ și *antihermitică* dacă $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$. Matricea A se numește *unitară*, dacă avem $(\bar{A})^t A = A(\bar{A})^t = I_n$.

Relațiile care caracterizează diferitele tipuri de matrice sînt următoarele

$A = -A$	matrice nulă	$A = \bar{A}$	matrice cu elemente reale
$A = A^t$	„ simetrică	$A = -\bar{A}$	„ cu elemente pur imaginare
$A = -A^t$	„ antisimetrică	$A = (\bar{A})^t$	„ hermitică
$AA^t = I$	„ ortogonală	$A = -(\bar{A})^t$	„ antihermitică
		$A(\bar{A})^t = I$	„ unitară

1. GENERALITĂȚI

Se numește soluție a ecuației $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, o mulțime ordonată de numere $a_1, a_2, \dots, a_n$, care verifică ecuația. Aceasta înseamnă că înlocuind pe x_1 cu a_1 , pe x_2 cu a_2 , ..., pe x_n cu a_n , ecuația se transformă într-o egalitate numerică, deci valoarea numerică a expresiei $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este nulă. O ecuație poate avea una, mai multe soluții, sau niciuna. Numărul soluțiilor unei ecuații depinde de corpul din care se iau aceste soluții. Astfel ecuațiile $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 + 1 = 0$, în corpul numerelor reale au în ordine o infinitate de soluții, una singură ($x = y = 0$) și nici una. În corpul numerelor complexe prima și ultima ecuație au o infinitate de soluții. În corpul numerelor raționale, ecuația $x^2 + y^2 - \sqrt{2} = 0$, nu are soluții. Două ecuații care au aceleași soluții, se zic *echivalente*. Operații permise asupra unei ecuații pentru a obține altă ecuație echivalentă sînt, adunarea sau scăderea în ambii membrii a aceleiași expresii matematice și înmulțirea celor doi membri cu o expresie care nu se poate anula.

Zicem că avem un sistem de ecuații, dacă ecuațiile trebuie să fie verificate simultan de aceleași soluții. Un sistem de ecuații se zice *compatibil* cînd are soluții și *incompatibil*, sau *imposibil*, în caz contrar. E de observat că dacă o ecuație din sistem nu are soluții, sistemul este incompatibil. Operația de găsire a soluțiilor unui sistem se numește *rezolvarea sistemului*.

Două sisteme care au aceleași soluții, se numesc *echivalente*. Operațiile permise asupra unui sistem, pentru a obține unul echivalent, sînt înlocuirea unei ecuații cu alta echivalentă și înlocuirea unei ecuații cu o combinație liniară a ei cu alte ecuații din sistem.

Un sistem de ecuații se numește *algebric*, dacă toate ecuațiile lui sînt algebrice și *nealgebric* în caz contrar. Un sistem algebric se numește *sistem liniar*, dacă toate ecuațiile lui sînt de gradul întâi.

Se mai ut lizează termenul de *sistem neliniar*, pentru un sistem (algebric sau transcendent) care nu este liniar.

2. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Un sistem de ecuații liniare are forma

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

unde coeficienții necunoscutelor și termenii liberi determină matricele

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

a doua numindu-se *matricea extinsă* a matricei A . Se numește *rang* al sistemului (1) rangul matricei A . Sistemul de ecuații se numește *omogen*, dacă toți termenii liberi sînt nuli, deci dacă $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ și *neomogen* în caz contrar.

Sistemul (1) se numește sistem *Cramer*, dacă $m = n$ și dacă rangul lui este n , deci dacă $D = |A| \neq 0$. Orice sistem Cramer are o singură soluție dată de *regula lui Cramer*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

unde determinanții $D_1, D_2, \dots, D_n$ se obțin din determinantul D înlocuind pe rînd prima, a 2^a, ..., a n^a coloană, cu termenii liberi ai ecuațiilor (trecuți în partea a doua a acestora).

Observație. În aplicarea regulei lui Cramer, trebuie să se facă un număr mare de operații aritmetice. Acest lucru, pentru n mare, o face greoaie pentru calcul, chiar pentru mașinile electronice cu viteză foarte mare. Acestea, pentru calculul determinanților și rezolvarea sistemelor Cramer, utilizează în special *algoritmul lui Gauss*. În acest scop se efectuează tocmai operațiile descrise pentru găsirea rangului unei matrice (Cap. 6.4).

Pentru discuția cazului general al sistemului (1), să presupunem că rangul sistemului este p , deci că există un determinant nenul de

ordinul p . Prin schimbări de ecuații între ele și renumerotarea necunoscutelor, putem presupune că acesta este

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Determinantul Δ se numește *determinant principal* al sistemului (1). Odată ales determinantul principal, necunoscutele ca și ecuațiile se împart în două categorii: *principale* și *neprincipale*, după cum coeficienții lor apar, sau nu, printre elementele determinantului principal. Se introduc apoi *determinanții caracteristici*

$$C_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} & b_p \\ a_{p+k,1} & a_{p+k,2} & \dots & a_{p+k,p} & b_{p+k} \end{vmatrix}, k = p+1, p+2, \dots, m-p.$$

Avem teorema lui Rouché: sistemul (1) este compatibil, dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sînt nuli. Soluția sistemului se obține rezolvînd ecuațiile principale față de necunoscutele principale, celelalte fiind trecute în membrii doi ai ecuațiilor. Avem o singură soluție sau o infinitate de soluții după cum nu avem, respectiv avem, necunoscute neprincipale, deci după cum $n = p$, sau $n > p$.

Trebuie observat că dacă nu avem ecuații neprincipale (deci $m = p$), sistemul este totdeauna compatibil.

Compatibilitatea unui sistem de ecuații liniare se poate examina și cu

teorema lui Kronecker-Capelli: sistemul (1) este compatibil dacă și numai dacă matricele A și $\tilde{A}$ au același rang.

2.1. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE ȘI OMOGENE

În cazul cînd în sistemul (1) avem $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, deci dacă sistemul este omogen, conform teoremei lui Rouché, el este totdeauna compatibil, căci toți determinanții caracteristici sînt nuli. Compatibilitatea se datorește faptului că un asemenea sistem are totdeauna *soluția nulă*, sau *banală*, $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Pentru

a avea și alte soluții decât soluția banală, trebuie ca rangul sistemului să fie mai mic decât numărul necunoscutelor, caz în care avem o infinitate de soluții.

În cazul particular când avem n ecuații liniare și omogene cu $n + 1$ necunoscute și rangul n

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + a_{n,n+1}x_{n+1} = 0, \end{cases}$$

soluțiile se scriu sub forma simetrică

$$\frac{x_1}{A_{n+1,1}} = \frac{x_2}{A_{n+1,2}} = \dots = \frac{x_{n+1}}{A_{n+1,n}},$$

unde $A_{n+1,j}$ este complementul algebric al elementului $a_{n+1,j}$ dintr-un determinant format cu coeficienții necunoscutelor din ecuații, la care se mai adaugă o linie cu elementele $a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,n+1}$.

A p l i c a ț i e. Ne propunem să găsim condiția ca *formele liniare*

$$L_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

$$L_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$L_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n$$

să fie liniar independente⁽¹⁾. În acest scop trebuie ca identitatea

$$\begin{aligned} &\lambda_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + \lambda_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \\ &+ \dots + \lambda_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \equiv 0 \end{aligned}$$

(1) Expresiile matematice $E_1, E_2, \dots, E_n$ se zic *liniar dependente*, dacă există constante nu toate nule $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, astfel încât să avem identitatea $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_n E_n = 0$. În caz contrar, expresiile se zic *liniar independente*, deci pentru acestea, din orice relație de forma precedentă, rezultă $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

să nu aibă loc decât dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Din identitatea precedentă rezultă

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + \dots + a_{m1}\lambda_m = 0 \\ a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{m2}\lambda_m = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + \dots + a_{mn}\lambda_m = 0, \end{cases}$$

ori acest sistem de ecuații liniare și omogene are numai soluția banală, dacă rangul lui este egal cu m . Înseamnă că formele liniare sînt liniar independente dacă matricea coeficienților lor are rangul m deci egal cu numărul formelor și liniar dependente dacă acest rang este mai mic decât m .

3) SISTEME DE ECUAȚII NELINIARE

Nu există metodă generală pentru rezolvarea sistemelor neliniare. Există unele metode și observații care pot fi utile în unele cazuri particulare.

Dacă o ecuație din sistemul S , sau sistemul S_1 format cu o parte din ecuații, nu are soluții, întregul sistem S nu are soluții.

Metoda care se încearcă întâi pentru sistemele neliniare este metoda substituției, care constă în eliminarea succesivă a necunoscutelor din ecuațiile sistemului.

Dacă un subsistem S_1 cu m ecuații ale sistemului S , se poate rezolva față de m necunoscute (de exemplu dacă este liniar), atunci m dintre necunoscute se pot elimina.

Dacă sistemul este algebric și toate ecuațiile sînt simetrice față de cele n variabile, este util uneori de a lua ca noi variabile funcțiile simetrice fundamentale formate cu vechile variabile. Odată acestea găsite, se formează ecuația de gradul n , care are drept rădăcini o soluție a sistemului dat. Prin permutări în toate felurile posibile, obținem toate soluțiile sistemului.

În cazul ecuațiilor și sistemelor de ecuații omogene, se ține seama de proprietățile pe care le are un polinom omogen și anume

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ și}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

4. METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE

Să presupunem că sistemul de ecuații liniare sau neliniare

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

are o soluție $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Pentru a găsi această soluție, sistemul se scrie (lucru posibil întotdeauna)

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \\ x_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Se pornește cu o soluție aproximativă $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ și se găsește aproximația următoare $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ din

$$\begin{cases} x_1^1 = g_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ x_2^1 = g_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ \dots \dots \dots \\ x_n^1 = g_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \end{cases}$$

ș.a.m.d. Se obține în felul acesta metoda lui *Jordan*. Se poate arăta că dacă aproximațiile succesive converg, limita este soluția sistemului. O variantă mai rapid convergentă este metoda lui *Gauss-Seidel*, care utilizează imediat orice componentă a soluției pe măsură ce ea este obținută. Astfel avem

$$\begin{cases} x_1^1 = g_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0) \\ x_2^1 = g_2(x_1^1, x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0) \\ x_3^1 = g_3(x_1^1, x_2^1, x_3^0, \dots, x_n^0) \\ \dots \dots \dots \\ x_n^1 = g_n(x_1^1, \dots, x_{n-1}^1, x_n^0) \end{cases}$$

ș.a.m.d. Cele două metode precedente se utilizează foarte des în special pentru sistemele de ecuații liniare.

⑤ SISTEME DE INECUAȚII CU DOUĂ VARIABILE. PROGRAMARE LINIARĂ ȘI NELINIARĂ

Să presupunem că avem inecuația liniară $ax + by + c > 0$. Dreapta $ax + by + c = 0$ împarte planul în două regiuni, una în care polinomul $ax + by + c$ este pozitiv și alta în care este negativ. Pentru a determina semnul pe care-l are polinomul în fiecare regiune, se înlocuiesc în el coordonatele unui punct a cărui poziție față de dreaptă este cunoscută (de exemplu originea axelor de coordonate, dacă dreapta nu trece prin acest punct). Astfel inecuația $x + y + 1 > 0$ are drept soluții coordonatele tuturor punctelor situate în regiunea determinată de dreapta $x + y + 1 = 0$ și care conține originea. În cazul unui sistem de inecuații liniare, se caută regiunea din plan în care sînt satisfăcute toate inecuațiile sistemului. Ea poate să nu conțină nici un punct, caz în care sistemul este incompatibil.

Pentru inecuația neliniară $f(x, y) > 0$, analog ca mai sus, curba de ecuație $f(x, y) = 0$, împarte planul în două regiuni, una în care funcția $f(x, y)$ ia valori pozitive, iar alta în care funcția $f(x, y)$ ia valori negative. Rezolvarea sistemelor de inecuații neliniare se face căutînd domeniul în care sînt satisfăcute toate inecuațiile sistemului.

Printr-o problemă de *programare liniară* se înțelege găsirea acelei, sau acelor soluții ale unui sistem de inecuații liniare care realizează maximul (sau minimul) unei funcții liniare $mx + ny + p$, numită *funcție scop*.

Notînd $\lambda = mx + ny + p$, cînd λ variază obținem o familie de drepte perpendiculare pe vectorul $\bar{v}$ de componente m și n . Mai precis, λ crește cînd dreapta D , de ecuație $mx + ny + p = 0$, se deplasează paralel cu ea însăși în sensul vectorului $\bar{v}$. Maximul lui λ poate avea loc pentru un vîrf sau o latură a domeniului soluțiilor sistemului de inecuații, sau poate să nu existe în cazul cînd acest domeniu este infinit în direcția și sensul vectorului $\bar{v}$. Pentru a găsi minimul funcției liniare, dreapta D se deplasează în sens contrar cu vectorul $\bar{v}$.

Analog ca mai sus se poate rezolva o problemă de *programare neliniară* în care inecuațiile nu sînt liniare, dar în care funcția scop este liniară.

Problemele de programare liniară sau neliniară, cu n variabile, se rezolvă prin metode algebrice, dintre care cea mai cunoscută este metoda *simplex*, datorită lui *Danzig*.

6. SISTEME DE ECUAȚII SCRISE MATRICEAL

6.1. SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Notînd

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

sistemul de ecuații

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

se poate scrie matriceal (sau vectorial)

$$AX = B.$$

Dacă matricea A este nesingulară, înmulțind la stînga relația precedentă cu A^{-1} , avem soluția sistemului

$$X = A^{-1}B,$$

de unde rezultă importanța cunoașterii matricei inverse.

Uneori necunoscutele reprezintă două sau mai multe categorii diferite de mărimi și se cer numai valorile necunoscutele dintr-una din aceste categorii. În asemenea cazuri se utilizează *matricele cu blocuri*. Astfel dacă în sistemul precedent interesează numai valorile necunoscutele $x_1, x_2, \dots, x_r$, se partiționează matricele A , B și X , după cum se arată mai jos (în paranteze fiind trecute dimensiunile blocurilor)

$$\begin{bmatrix} A_1(r, r) & : & A_2(r, n-r) \\ \dots & \dots & \dots \\ A_3(n-r, r) & : & A_4(n-r, n-r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(r, 1) \\ \dots \\ X_2(n-r, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(r, 1) \\ \dots \\ B_2(n-r, 1) \end{bmatrix}.$$

Ecuația matriceală $AX = B$ este echivalentă cu sistemul de ecuații matriceale

$$\begin{cases} A_1X_1 + A_2X_2 = B_1 \\ A_3X_1 + A_4X_2 = B_2. \end{cases}$$

Pentru a elimina matricea X_2 , înmulțim la stînga a doua ecuație cu $A_2 A_4^{-1}$ și apoi o scădem din prima ecuație. Avem

$$(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) X_1 = B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2$$

de unde

$$X_1 = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1} (B_1 - A_2 A_4^{-1} B_2),$$

evident cu condiția ca matricele A_4 și $A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3$ să fie nesarabile.

6.2. REZOLVAREA CU APROXIMAȚIE A SISTEMELOR DE ECUAȚII

Sistemul din paragraful 6.4

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

se scrie

$$X = G(X),$$

unde

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad G(X) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \quad \dots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}.$$

Pornind cu o soluție aproximativă X_0 , avem succesiv

$$X_1 = G(X_0), \quad X_2 = G(X_1), \quad \dots$$

În cazul cînd vectorii $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ au o limită cînd $n \rightarrow \infty$, aceasta este o soluție a sistemului dat. Ori aceasta este metoda aproximațiilor succesive pentru o singură ecuație.

Cap. VIII. Structuri algebrice

1. GENERALITĂȚI

1.1. PRODUS CARTEZIAN

Fiind date două mulțimi A și B , se numește *produs cartezian* a lui A cu B , mulțimea notată cu $A \times B$, ale cărei elemente sînt *toate* perechile ordonate obținute luînd primul element din mulțimea A și al doilea element din mulțimea B .

Se scrie simbolic $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$. În general $A \times B \neq B \times A$. Dacă cele două mulțimi coincid, scriem $A \times A = A^2 = \{(x, y) | x, y \in A\}$.

Observație. Noțiunea de produs cartezian se extinde la mai mult de două mulțimi: Prin produsul cartezian al mulțimilor $A_1, A_2, \dots, A_m$ (notație $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$), se înțelege mulțimea m -tuplurilor $(a_1, a_2, \dots, a_m)$, unde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_m \in A_m$.

Exemple. 1° Dacă $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$, avem produsele carteziane diferite

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\},$$

$$B \times A = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\},$$

căci de exemplu perechile $(1, 0)$ și $(0, 1)$ sînt distincte. Avem de asemenea

$$A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

2° Dacă $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 4\}$, avem

$$A \times B \times C = \{(0, 1, 2), (0, 1, 4), (0, 3, 2), (0, 3, 4), (1, 1, 2), (1, 1, 4), (1, 3, 2), (1, 3, 4)\}.$$

1.2. CUANTIFICATORI UNIVERSALI

Pentru prescurtarea scrisului se utilizează notațiile

$\forall x \in A$ în loc de *pentru orice element x al mulțimii A ,*

$\exists x \in A$ în loc de *există cel puțin un element x al mulțimii A .*

Cele două simboluri $\forall$ și $\exists$ se numesc *cuantificatori*, primul *universal* și al doilea *existențial*.

1.3. RELAȚIE BINARĂ

Fiind date două mulțimi A și B , distincte sau nu, orice submulțime R a produsului $A \times B$, se numește *relație binară* și scriem $R \subset A \times B$.

Citim : R este o relație *între* A și B , iar în cazul când $R \subset A \times A$, R este o relație *pe* A . Mulțimea vidă este și ea o relație.

Exemplu. Dacă $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 4, 5\}$, atunci $R_1 = \{(1, 1), (2, 5), (3, 4)\}$, $R_2 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 5)\}$ sînt relații între mulțimile A și B , iar $R_3 = \{(1, 1), (2, 3)\}$ este o relație pe A . Însă $R_4 = \{(1, 1), (5, 2), (3, 4)\}$ nu este o relație între A și B .

Orice relație binară se poate reprezenta printr-o *diagramă sagitală*, cu convenția ca la fiecare element $(a, b) \in R$ să facem să-i corespundă o săgeată cu originea în punctul reprezentativ al lui a și cu extremitatea în punctul reprezentativ al lui b (Fig. 8.1).

Prin *relație inversă* a unei relații R se înțelege relația $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$, submulțime a produsului $B \times A$. Ea are aceeași reprezentare sagitală ca și R , dar toate săgețile au sensurile schimbate.

Exemplu. Relațiile inverse celor din exemplul precedent sînt $R_1^{-1} = \{(1, 1), (5, 2), (4, 3)\}$, $R_2^{-1} = \{(1, 1), (4, 1), (5, 2)\}$, $R_3^{-1} = \{(1, 1), (3, 2)\}$.

Observație.

Mai general, se numește *relație m-ară*, o submulțime a produsului cartezian $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m$.

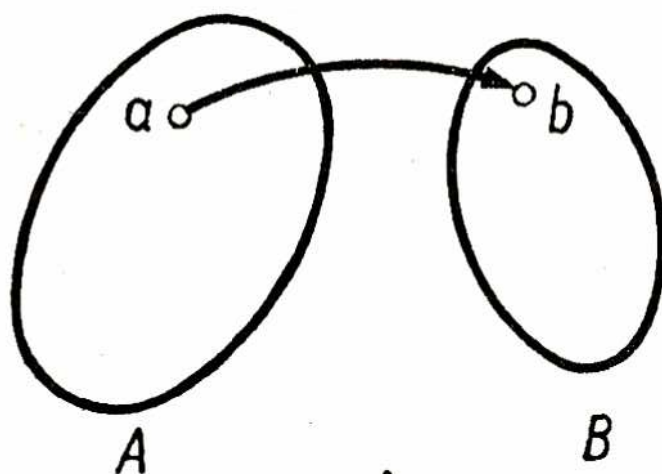


Fig. 8.1

1.4. FUNCȚIE

Se numește *relație funcțională*, orice relație f între două mulțimi A și B , pentru care din $(x, y) \in f$ și $(x, z) \in f$, $x \in A$, $y \in B$, rezultă $y = z$.

Și mulțimea vidă de perechi ordonate dintr-un produs cartezian, este o relație funcțională.

Exemplu. Dacă $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 4, 5\}$, atunci relația $R_1 = \{(1, 1), (2, 5), (3, 4)\}$ este o relație funcțională, dar $R_2 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 5)\}$ nu este o asemenea relație funcțională.

Mulțimea D a tuturor valorilor x , așa ca $(x, y) \in f$, se numește *domeniu de definiție* al relației funcționale, iar mulțimea V a valorilor y , așa ca $(x, y) \in f$, *domeniul valorilor* relației f , deci $f \subseteq D \times V$ ($D \subset A$, $V \subset B$).

Noțiunea se extinde pentru relații m -are. O relație m -ară f se numește *relație funcțională*, dacă din $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, y) \in f$ și $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, z) \in f$, rezultă $y = z$.

Relația funcțională pentru care $D = A$, se numește *funcție*, sau *aplicație*. D și V se numesc *domeniul de definiție*, respectiv *domeniul valorilor funcției*.

Se scrie uneori $(D, V; f)$. Rezultă că pentru orice $x \in D$ avem exact un $y \in V$, așa ca $(x, y) \in f$, ceea ce se scrie de obicei $y = f(x)$. Elementul $f(x)$ se numește *valoarea* lui f pentru *argumentul* x , sau *imaginea* lui x prin funcția f . Terminologia care se mai folosește este următoarea:

se zice că f este o *aplicație*, sau *surjecție*, a lui A în B (scriem $f: A \rightarrow B$), iar dacă și $V = B$, se zice că avem o *aplicație*, sau o *surjecție*, a lui A pe B . Se mai spune că f este o *aplicație* sau *funcție surjectivă*.

Dacă în mulțimea V , elementul imagine nu este imaginea decât a unui singur element din $A = D$, deci dacă din $f(x_1) = f(x_2)$, rezultă, $x_1 = x_2$, se zice că funcția, sau aplicația f este o *injecție* a lui A în B (sau pe B , dacă $V = B$). Se mai spune că f este o *aplicație* sau *funcție injectivă*.

O funcție, sau aplicație, care este surjectivă și injectivă, se numește *funcție*, sau *aplicație, bijectivă* sau *bijecție*. Corespondența dintre D și V se zice *biunivocă*.

Exemple. Relația $\{(2, 3), (4, 3), (1, 4)\}$, submulțime a lui $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, are domeniul de definiție $A = \{2, 4, 1\}$ și domeniul valorilor $V = \{3, 4\}$. Ea este o surjecție, dar nu este o injecție. În schimb relația funcțională $\{(2, 3), (1, 4)\}$ este o bijecție ($\mathbb{R}$ este mulțimea numerelor reale).

Observație. Fără să insistăm, amintim că noțiunea de funcție se poate extinde pentru relații funcționale m -are.

Relația inversă a lui f , notată cu f^{-1} , nu este obligatoriu o funcție, nici cel puțin o relație funcțională.

Pentru ca relația f^{-1} să fie o funcție, trebuie ca f să fie o bijecție a lui A în B , sau pe B . În acest caz f^{-1} se numește *funcție inversă* a lui f .

1.5. RELAȚIE DE ECHIVALENȚĂ

O relație $R \subset A \times A$ se numește *relație de echivalență*, dacă este reflexivă, la orice element $a \in A$, avem $(a, a) \in R$,

simetrică, dacă $(a, b) \in R$, atunci și $(b, a) \in R$, deci rezultă $R = R^{-1}$,

transitivă dacă $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$, atunci $(a, c) \in R$.

Dacă R este o relație de echivalență, condiția $(x, y) \in R$ se scrie uneori $x \equiv y \pmod{R}$ și se citește: x echivalent cu y prin relația R , sau modulo R . Cu această notație cele trei proprietăți se scriu

$$a \equiv a \pmod{R},$$

$$a \equiv b \pmod{R} \Rightarrow b \equiv a \pmod{R}.$$

$$a \equiv b \pmod{R}, b \equiv c \pmod{R} \Rightarrow a \equiv c \pmod{R}.$$

Din punctul de vedere al reprezentării sagitale, pentru orice relație de echivalență, în fiecare punct trebuie să avem câte o buclă, două puncte trebuie să fie legate prin două săgeți de sensuri contrarii, iar între trei puncte reprezentative ale elementelor a, b, c , dacă avem o săgeată de la a la b și una de la b la c , trebuie să avem și o săgeată de la a la c .

Exemplu. Fiind dată mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, două numere întregi a și b se zic echivalente, dacă diferența lor este divizibilă cu numărul $p \in \mathbb{N}$. Relația de echivalență astfel definită, se numește *congruență de modul p* și scriem $a \equiv b \pmod{p}$. ($\mathbb{N}$ este mulțimea numerelor naturale).

Fiind dată o relație de echivalență R , definită pe mulțimea A , se numește *clasă de echivalență* a elementului $x \in A$ față de R , mulțimea E a tuturor elementelor $y \in A$ echivalente cu x , modulo R . (Este evident că $E \subset A$). Se numește *sistem de reprezentanți* ai unei relații de echivalență, o mulțime de elemente din A , care conține câte un singur element din fiecare clasă de echivalență.

Exemplu. Într-o congruență de modul 5, clasa de echivalență a numărului 3 este formată de toate numerele de forma $5m + 3$, m întreg. Un sistem de reprezentanți este $15; 6; 2; 3; 9$, sau unul mai simplu $0; 1; 2; 3; 4$.

1.6. RELAȚII DE ORDINE

O relație $R \subset A \times A$ se numește *relație de ordine*, dacă este reflexivă, transitivă și antisimetrică. Prin ultima proprietate se înțelege că mulțimea R conține simultan perechile (a, b) și (b, a) , numai dacă $a = b$.

Exemplu. Relația de incluziune $\subset$ pentru mulțimi, este o relație de ordine. De asemenea relația $a \leq b$ în mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale este o relație de ordine.

1.7. LEGI DE COMPOZIȚIE BINARE

Printr-o *lege de compoziție binară*, sau *operație binară*, se înțelege în general o aplicație a mulțimii $A \times B$ într-o altă mulțime E . Notînd aplicația cu o literă $f, g, \dots$ sau cu un semn $+, \cdot, *, \top, \perp, \dots$ legea de compoziție se scrie pe scurt $f: A \times B \rightarrow E, \dots, *: A \times B \rightarrow E, \dots$. Dacă aplicația se notează cu semnul $+$ sau cu $\cdot$, se zice că ea este notată *aditiv*, respectiv *multiplicativ*.

În cazul cînd mulțimile A și B au un număr finit de elemente, legea de compoziție se poate defini cu ajutorul unui *tabel al operației* (analog cu tabla de înmulțire din aritmetica elementară).

Exemplu. Dacă mulțimile sînt $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 8, 9\}$ și operația, notată $*$, este aflarea c.m.m.m.c., avem

$*$	2	3	8	9
1	2	3	8	9
3	6	3	24	9
4	4	12	8	36

și deci $E = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 24, 36\}$.

În cazul cînd una sau amîndouă dintre mulțimile A și B sînt egale cu E , avem definițiile

Se numește *lege de compoziție externă*, sau *operație externă*, o aplicație $E \times A$ în E .

Exemplu. Înmulțirea vectorilor (mulțimea E) cu scalari (mulțimea A).

Se numește *lege de compoziție internă*, sau *operație internă*, o aplicație $E \times E$ în E .

Exemplu. În mulțimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi, avem pentru adunare $+: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$.

Observații. 1° O operație care se referă la clasele de echivalență, nu trebuie să depindă de alegerea sistemului de reprezentanți, caz în care se spune că este „bine definită”.

2° Operația introdusă mai sus este o operație binară.

Mai general, prin *lege de compoziție, m-ară internă* se înțelege aplicația $f: E^m \rightarrow E$.

Pe viitor vom considera numai legi de compoziție interne. De aceea în aplicații va trebui să se verifice dacă operația făcută în mulțimea dată, conduce *numai* la elemente din aceeași mulțime. Se zice că în acest caz *mulțimea este închisă față de operație*.

Exemplu. Adunarea pentru mulțimea $\{1, 2, 3\} \subset \mathbf{Z}$ nu reprezintă o lege de compoziție internă, căci mulțimea considerată nu este închisă față de adunare.

1.8. PROPRIETĂȚILE LEGILOR DE COMPOZIȚIE INTERNĂ

Fie operația internă $*: E \times E \rightarrow E$.

Operația este asociativă, dacă pentru $\forall a, b, c \in E$, avem $a*(b*c) = (a*b)*c$.

Exemplu. În mulțimea numerelor reale, adunarea este asociativă, dar scăderea nu, căci $(7 - 3) - 5 = -1$, iar $7 - (3 - 5) = 9$.

Operația este comutativă, dacă $\forall a, b \in E$, avem $a*b = b*a$.

Exemplu. Adunarea matricelor este comutativă, dar înmulțirea în general nu.

Mulțimea E are un element neutru e față de operația $*$, dacă $\forall a \in E$, avem $e*a = a*e = a$. Dacă un asemenea element există, el este unic.

E x e m p l u. Mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale are ca element neutru față de adunare numărul 0, iar față de înmulțire numărul 1.

Pentru operațiile interne necomutative se introduc noțiunile de element neutru la dreapta ($a * e_d = a$), sau neutru la stînga ($e_s * a = a$). Dacă ambele elemente există, ele coincid.

Un element $a \in E$ se numește *regulat* față de legea $*$, dacă $\forall x, y \in E$, din $a * x = a * y$, sau din $x * a = y * a$, rezultă $x = y$.

Noțiunea este importantă, căci dacă elementul a este regulat putem „simplifica” cu el, deci din $x * a = y * a$, avem $x = y$.

Un element $s \in E$ se numește *singular* dacă $\forall a \in E, s * a = a * s = s$. Se poate defini și aici elementul singular la dreapta și la stînga. Dacă ambele există, ele coincid.

Dacă într-o mulțime E , față de operația $*$, avem un element neutru, se numește element *simetric* al unui element $x \in E$, acel element x' , pentru care avem $x * x' = x' * x = e$.

Dacă legea este notată aditiv, simetricul se notează $-x$ și se numește opusul lui x , iar dacă legea este notată multiplicativ, simetricul se notează cu x^{-1} și se numește inversul lui x .

Dacă legea $*$ este asociativă și dacă pentru elementul x există un simetric, el este unic și regulat.

Dacă în mulțimea E sînt definite două operații interne $*$ și $\top$, se spune că operația notată $*$ este *distributivă* față de operația notată cu $\top$, dacă $\forall a, b \in E$, avem

$$a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c) \text{ și } (b \top c) * a = (b * a) \top (c * a).$$

Dacă legea notată $*$ este comutativă, cele două proprietăți se confundă. În caz contrar avem distributivitate la dreapta, respectiv la stînga.

E x e m p l e. 1° În mulțimea numerelor întregi, înmulțirea este distributivă față de adunare, dar adunarea nu este distributivă față de înmulțire, căci $3 \cdot (7 + 3) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 3$ și $3 + (7 \cdot 3) \neq (3 + 7) \cdot (3 + 3)$.

2° Operațiile de reuniune și intersecție a două mulțimi sînt distributive una față de cealaltă, căci avem $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. STRUCTURI ALGEBRICE

Se numește *structură algebrică* o mulțime nevidă E de elemente pentru care sînt definite una sau mai multe operații m -are determinate de aplicațiile $f_i: E^j \rightarrow E$, unde $i = 1, 2, \dots, k$, iar $j \in \mathbb{Z}_+$.

Cînd $j = 1$, avem o operație unară $f: M \rightarrow M$. Structura se poate nota cu $\mathfrak{M} = (E; f_1, \dots, f_k)$, punîndu-se în evidență mulțimea de elemente și operațiile ce se fac asupra lor.

Orice submulțime nevidă F a lui E se numește *substructură* a structurii $\mathfrak{M}$, dacă ea este o structură algebrică față de aceleași operații, deci dacă este închisă față de aceste operații.

2.1. STRUCTURI ALGEBRICE CU O OPERAȚIE BINARĂ

2.1.1. Grupoid

Se numește *grupoid* o mulțime E pe care este definită o operație binară, notată cu $*$, deci o aplicație a lui $E \times E$ pe E , care asociază la fiecare pereche ordonată (a, b) de elemente din E , un anumit element $c \in E$. Se scrie $c = a * b$.

2.1.2. Semigrup

Se numește *semigrup* față de operația $*$, un grupoid pentru care operația este asociativă.

Dacă ea este în plus și comutativă, semigrupul se numește *abelian*.

2.1.3. Grup

Un semigrup care are element neutru și în care fiecărui element îi corespunde un element simetric, se numește *grup*. Altfel spus, se numește grup o mulțime nevidă E în care s-a definit o operație de compunere, notată $*$, față de care E este închisă și care are proprietățile

$$\forall a, b, c \in E, a * (b * c) = (a * b) * c, \text{ asociativitate,}$$

$$\exists e \in E, \forall a \in E, a * e = e * a = a, \text{ element neutru,}$$

$$\forall a \in E, \exists a' \in E, a * a' = a' * a = e, \text{ element simetric.}$$

Grupul se numește *abelian*, dacă operația este comutativă.

Pe baza axiomelor grupului, rezultă că ecuația $a * x = b$, unde $a, b \in E$, are o singură soluție $x = a' * b \in E$. Proprietatea poate înlocui ultimele două axiome.

În cazul când numărul elementelor unui grup este finit, acest număr se numește *ordinul* grupului; în caz contrar grupul se zice de *ordin infinit*.

Operația grupului se poate nota cu semnul $+$, sau cu $\cdot$, indiferent de ce fel de operație este vorba. Se zice în acest caz că avem un grup aditiv, respectiv multiplicativ (mai corect: notat aditiv, respectiv multiplicativ). În asemenea cazuri elementul neutru se numește *element nul*, respectiv *element unitate* și se notează cu 0 , respectiv 1 (Notăția aditivă se folosește de obicei pentru grupurile abeliene).

O submulțime nevidă $F \subseteq E$ a unui grup $(E, *)$, se numește *subgrup*, dacă este închisă față de operația $*$ și dacă $(F, *)$ este un grup. Condiția necesară și suficientă ca F să fie un subgrup al lui E este ca $\forall a, b \in F$, să avem sau $a * b' \in F$, b' fiind simetricul lui b , sau să avem simultan $a * b \in F$ și $a' \in F$. În orice subgrup al lui E , elementul neutru este același cu al lui E , iar simetricul unui element din F este același în E și F .

Exemple. 1° Mulțimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi formează față de adunare un grup comutativ, cu elementul neutru 0 , simetricul numărului k fiind $-k$. Aceeași mulțime față de operația de scădere, care nu este asociativă, formează un grupoid.

2° Înmulțirea matricelor n/n cu elemente din $\mathbf{R}$ este asociativă și are un element unitate (matricea unitate de ordinul n). Mulțimea acestor matrice formează un semigrup, față de înmulțire. Mulțimea matricelor nesingulare n/n , față de înmulțirea matricelor, formează un grup necomutativ. Mulțimea matricelor nesingulare și diagonale n/n , este un subgrup comutativ al celui precedent.

2.1.4. Omomorfism, izomorfism

Noțiunile ce urmează au rolul de a scoate în evidență proprietăți comune ale unor structuri algebrice cu o singură operație, indiferent de natura elementelor, sau a operației.

Fie grupoizii $(E, \top)$ și $(F, \perp)$. O aplicație $f : E \rightarrow F$ se numește *omomorfism*, dacă $\forall x, y \in E$, avem

$$(1) \quad f(x \top y) = f(x) \perp f(y),$$

deci obținem același rezultat când luăm imaginea prin f a compusului în E a elementelor x și y , sau când compunem în F imaginile $f(x)$

și $f(y)$. Deseori formula (1) se scrie cu același semn pentru operațiile din cei doi grupoizi, însăși elementele care se compun arătând care operație trebuie utilizată. Astfel, cu notații aditive și multiplicative, avem

$$(1') \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$(1'') \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Dacă funcția f este bijectivă, omomorfismul se numește *izomorfism* al grupoidului E în F . Un omomorfism $f: E \rightarrow E$ se numește *endomorfism*, iar un izomorfism $f: E \rightarrow E$ se numește *automorfism*.

Doi grupoizi izomorfi, se consideră identici din punct de vedere algebric. Într-un izomorfism elementele neutre și cele simetrice se corespund, deci dacă e este elementul neutru în E , atunci $f(e)$ este elementul neutru în F , apoi dacă x' este elementul simetric în E al lui x , $f(x')$ este elementul simetric al lui $f(x)$ din F , ceea ce se poate constata ușor și din tabelele de operații.

Exemple. 1° Fie E grupul aditiv al numerelor reale $\mathbf{R}$ și fie F grupul multiplicativ al numerelor reale nenule $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Dacă a este un număr real pozitiv, funcția $f(x) = a^x$ ($a \neq 1$) este un izomorfism a lui $\mathbf{R}$ în $\mathbf{R}_+$, sau omomorfism a lui $\mathbf{R}$ în $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, căci $\forall x, y \in \mathbf{R}$, avem

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x) f(y).$$

Elementele neutre în cele două grupuri sînt 0 și 1 și avem $f(0) = a^0 = 1$. În E elementul simetric lui x este $-x$, iar în F elementul a^x are simetricul a^{-x} .

2° Dacă E este grupul multiplicativ al numerelor reale nenule, funcția $f(x) = x^m$ este un endomorfism a lui E în E , căci

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m = f(x) \cdot f(y).$$

Dacă m este impar, avem un automorfism a lui E în E .

2.2. STRUCTURI ALGEBRICE CU DOUĂ OPERAȚII BINARE

2.2.1. Inel

Mulțimea nevidă E , închisă față de două operații binare numite adunare și înmulțire și notate cu $+$ și cu $\cdot$, este un *inel* dacă $(E, +)$ este un grup comutativ, $(E, \cdot)$ un semigrup și dacă înmulțirea este

distributivă față de adunare. Prin urmare, $\forall a, b, c \in E$ avem (axiomele inelului)

$$I_1 \quad (a + b) + c = a + (b + c),$$

$$I_2 \quad \exists 0, a + 0 = 0 + a = a,$$

$$I_3 \quad \forall a, \exists (-a) \in E, a + (-a) = (-a) + a = 0,$$

$$I_4 \quad a + b = b + a,$$

$$II \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a,$$

$$III \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

Dacă înmulțirea este comutativă, inelul se zice *comutativ*. Dacă inelul are un element unitate, el se zice *inel cu element unitate*.

Exemple. 1° Mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi, față de adunarea și înmulțirea obișnuită, este un inel comutativ cu element unitate. Elementul neutru față de adunare este zero. El este singular față de înmulțire.

2° Mulțimile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ și cea a claselor de resturi modulo p , sînt inele comutative față de adunare și înmulțire.

Observații. 1° În orice inel, elementul neutru față de adunare este element singular față de înmulțire.

2° Un element nenul $a \in E$ se numește *divizor al lui zero* al inelului dacă $\exists b \in E, a \cdot b = 0$. Într-un asemenea inel, din $a \cdot b = a \cdot c$, nu putem deduce $b = c$.

Exemplu. Inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui zero, dar inelul matricelor $2/2$ cu elemente din $\mathbb{R}$, față de operațiile de adunare și înmulțire a matricelor, are astfel de divizori, căci de exemplu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3° Mulțimea nevidă $F \subseteq E$ determină un *subinel* a lui $(E, +, \cdot)$, dacă ea este închisă față de cele două operații și dacă $(F, +, \cdot)$ este un inel.

4° Dacă în inelul $(E, +, \cdot)$, cu element unitate și comutativ, nu avem divizori ai lui zero, deci dacă din $a \cdot x = a \cdot y, a \neq 0$, rezultă $x = y$, structura se numește *inel integru*, sau *inel de integritate*, sau *domeniu de integritate*.

Astfel $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este un domeniu de integritate.

2.2.2. Corp

Mulțimea nevidă E , închisă față de două operații binare, numite adunare și înmulțire și notate cu $+$ și $\cdot$, este un *corp*, dacă $(E, +)$ este un grup abelian, $(E \setminus \{0\}, \cdot)$ un grup și dacă înmulțirea este distributivă față de adunare. Prin urmare $\forall a, b, c \in E$ avem (axiomele corpului)

$$I_1 \quad (a + b) + c = a + (b + c),$$

$$I_2 \quad \exists 0, a + 0 = 0 + a = a,$$

$$I_3 \quad \forall a, \exists (-a) \in E, a + (-a) = 0,$$

$$I_4 \quad a + b = b + a.$$

$$II \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a,$$

$$III_1 \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

$$III_2 \quad \exists 1 \in E, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a,$$

$$III_3 \quad \forall a, \exists a^{-1} \in E, a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1.$$

Dacă și înmulțirea este comutativă, corpul se numește comutativ.

Exemple. Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale, mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale și mulțimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe, formează corpuri.

Observații. 1° Un inel integru, în care orice element diferit de zero are un simetric față de înmulțire, este un corp comutativ.

2° Mulțimea $F \subseteq E$, determină un *subcorp* al lui $(E, +, \cdot)$, dacă ea este închisă față de cele două operații și dacă $(F, +, \cdot)$ este un corp.

2.2.3. Omomorfism, izomorfism

Fie două inele $(E, +, \cdot)$, $(F, +, \cdot)$ în care operațiile au fost notate la fel (fără ca ele să fie obligatoriu aceleași). O aplicație $f: E \rightarrow F$ se numește *omomorfism*, dacă avem

$$(2) \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$(3) \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

În cazul când aplicația este bijectivă, omomorfismul se numește *izomorfism* a lui E în F . Dacă F coincide cu E , omomorfismul se numește *endomorfism*, iar izomorfismul se numește *automorfism* a lui E în E .

Prin urmare noțiunile sînt aceleași ca și la grupoizi, cu diferența că aici avem cîte un grupoid pentru fiecare operație. De aceea rezultatele de la § 2.1.4, referitoare la elementul neutru și la simetricul unui element rămîn valabile, dacă asemenea elemente există.

E x e m p l u. Inelul $\mathbf{Z}$ al numerelor întregi și inelul A al matricelor pătrate de forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, a întreg, sînt izomorfe prin aplicația $f: \mathbf{Z} \rightarrow A$,

$$f(x) = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}.$$

EXERCITII

Cap. I. Expresii matematice

Să se calculeze :

• 1. $S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}.$

• 2. $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}.$

• 3. $\frac{\sqrt{26 - 15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2} - \sqrt{38 + 5\sqrt{3}}}.$

• 4. $\frac{\sqrt[8]{94 + 42\sqrt{5}} + \sqrt[8]{94 - 42\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}}.$

• 5. $2 + \sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}.$

Să se aducă la forma cea mai simplă, expresiile :

• 6. $(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3.$

• 7. $\frac{(m+1)x^2 - 2(m-1)x - 8}{2x^2 + (m-4)x - 2m}.$

• 8. $\frac{a^2 - b^2 - c^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2 - c^2 - a^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{(c-a)(c-b)}.$

• 9. $\frac{x^{11} + x^7 + x^5 - x^2 - x - 1}{x^7 + x^6 + x^5 - x^2 - x - 1}.$

• 10. $\frac{\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} + 4}{\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+b+c}}$

• 11.
$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^4 + (\sqrt{y}-\sqrt{z})^4 + (\sqrt{z}-\sqrt{x})^4}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + (\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 + (\sqrt{z}-\sqrt{x})^2} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + z\sqrt{z} - 3\sqrt{xyz}}.$$

• 12. $F = \frac{\sqrt{x^2(x-1)^2}}{x(x-1)}, \quad x \in \mathbf{R} - \{0, 1\}.$

• 13. Se dau expresiile

$$E_1 = (ax + b)^2 - (b - ax)^2 - 2abx,$$

$$E_2 = [a + b(x + a^2)] : \left(b + \frac{a}{x + a^2}\right) + (b - a^2x) : \left(a^2 - \frac{b}{x}\right),$$

$$E_3 = [b + a(a + 2b^2x^2)] : \left(a + \frac{b}{a + 2b^2x^2}\right) - \\ - [a(a + b^2x^2) - b] : \left(a - \frac{b}{a + b^2x^2}\right).$$

1° Să se aducă la forma cea mai simplă cele trei expresii.

2° Să se arate că suma $E_1 + E_2 + E_3$ este un pătrat perfect.

3° Să se scrie sub formă de produs expresia $E_1^2 - (E_2 + E_3)^2 + 4$.

• 14. Să se arate că valoarea numerică a expresiei

$$E(x, y) = \frac{4x^2(2x - y) - 4y^3 + 16x^2y}{2x^3 - 5x^2y + 4xy^2 - y^3},$$

pentru $x = (\sqrt{9 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{9 - 6\sqrt{2}})^2$ și $y = (\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{2}})^2$ este pătrat perfect.

• 15. Să se arate că polinomul $P(x) = x^3 - 9x^2 + 23x + 10$, ia aceeași valoare numerică pentru fiecare dintre rădăcinile trinomialului $x^2 - 5x + 3$.

• 16. Să se calculeze valoarea expresiei $E = x^{14} + \frac{1}{x^{14}}$, pentru una dintre rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$.

• 17. Să se elimine x între $x + \frac{1}{x} = a$ și $x^4 + \frac{1}{x^4} = b$.

Să se descompună în factori expresiile

• 18. $4x^4y^4 - (x^4 + y^4 - z^4)^2.$

- 19. $(x + y)^4 + x^4 + y^4$.
- 20. $(x + y)^5 - x^5 - y^5$.
- 21. $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + 2abc$.
- 22. $x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1)$.
- 23. În corpul numerelor reale, să se descompună în factori polinomul $P(a, b, c) = (b - c)(b + c)^4 + (c - a)(c + a)^4 + (a - b)(a + b)^4$.
- 24. Să se descompună în factori de gradul întâi, în corpul numerelor complexe, polinomul $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.
- 25. Să se arate că expresia $E = (a^2 - bc)^3 + (b^2 - ca)^3 + (c^2 - ab)^3 - 3(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab)$, este un pătrat perfect.
- 26. Să se afle rădăcina de ordinul doi a polinomului $B = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.
- 27. Să se descompună în factori expresia $E(a, b, c) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)$. Să se arate că dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare, avem $E(a, b, c) > 0$.
- 28. Să se simplifice expresia

$$F(x, y) = \frac{x^3 - x - y^3 + y + xy^2 - x^2y}{x^3 + x - y^3 - y + xy^2 - x^2y}.$$

Să se arate că dacă înlocuim în expresia simplificată pe x și y cu

$$x = \frac{k(1 - z^2)}{1 + z^2} \text{ și } y = \frac{2kz}{1 + z^2}$$

expresia obținută nu depinde de z .

- 29. Se dă expresia

$$E(x, y, z) = \frac{x^3 + y^3 - z^3 + 3x^2y + 3xy^2 + x^2z + y^2z + 2xyz - xz^2 - yz^2}{\left(\frac{y - z}{x} + 1\right)(x^3 + xy^2 + 2x^2y - xz^2)}.$$

- a. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.
- b. Știind că $x + y = z^2 + 4$, să se afle pentru ce valori ale lui z , avem

$$E(x, y, z) = \frac{3}{2}.$$

c. Știind că

$$x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}\sqrt{4^3} - \frac{1}{18}}{(\sqrt{2^3}\sqrt{2} + \sqrt{3^4} - \sqrt{4^5})\frac{1}{36}}; \quad y = (3^2 - 4^2) : \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{\frac{3}{2}}$$

și că z ia valoarea cea mai mare obținută la punctul precedent, să se afle valoarea numerică a expresiei date pentru aceste valori.

● 30. Să se arate că expresia

$$E = \frac{\cos 2x - (m - 1) \cos 4x + m}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + m \sin^2 x}$$

este independentă de parametrul m .

● 31. Să se afle toate numerele nenegative, a, b, c pentru care avem

$$\sqrt{a - b + c} = \sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

● 32. Să se scrie sub forma de sumă de doi radicali, expresia

$$E = \sqrt{x^2 + x + 1 + \sqrt{2x^3 + x^2 + 2x}}.$$

● 33. Dându-se polinomul $P(x) = (x + a)^2 + (x + b)^2$, să se determine constantele a și b astfel ca $P(x) + P'(x) = 2(x + 1)^2$.

● 34. Să se determine polinomul $P(x)$, de grad minimal, astfel încât $P(x)$ să se dividă cu $x^2 + 1$, iar $P(x) - 1$ cu $x^3 + 1$. Generalizare. Să se examineze dacă se poate găsi un polinom $P(x)$, multiplu al polinomului $Q(x)$, așa ca $P(x) - 1$ să fie multiplu al polinomului $R(x)$, unde $Q(x)$ și $R(x)$ sînt polinoame date.

● 35. Să se determine polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ astfel ca să avem

$$1 - x \cos a \equiv x^n Q(x) + (1 - 2x \cos a + x^2) P(x).$$

● 36. Să se găsească toate polinoamele $f(x)$ care se anulează pentru $x = 0$ și care verifică identitatea $f(x + 1) - f(x) \equiv (x + 1)^3$.

● 37. Să se arate că orice polinom de gradul n se poate pune sub forma $a_0 + a_1 x + a_2 x(x - 1) + \dots + a_n x(x - 1) \dots (x - n + 1)$.

● 38. Să se determine polinoamele $A(z)$ de gradul trei și transformările liniare $z \rightarrow \lambda z + \mu$, așa ca $A(\lambda z + \mu) \equiv A(z)$.

● 39. Știind că $f(x, n, h) = x(x - h) \dots (x - (n - 1)h)$, să se arate că $f(x + y, n, h) = f(x, n, h) + C_n^1 f(x, n - 1, h) f(y, 1, h) + \dots + C_n^n f(y, n, h)$.

● 40. Să se afle câtul și restul împărțirii polinomului $(x - 1)^n + (x + 1)^n - 1$ prin $x^2 - 1$.

● 41. Să se determine $P(x) = ax^2 + bx + c$ așa ca $P(x^2)$ să fie divizibil cu $P(x)$.

● 42. Fie $P(z) = az^2 + bz + c$. Să se arate că $P[P(z)] - z$ este divizibil cu $P(z) - z$. Aplicație. Să se rezolve ecuația $(z^2 - 3z + 1)^2 = 3z^2 - 8z + 2$.

● 43. Să se determine un polinom $f(x)$ astfel încât $f(x) + 1$ să fie divizibil cu $(1 - x)^3$ și $f(x) + 2$ cu x^4 .

● 44. Să se determine constantele A și B , astfel ca polinomul $P(x) = Ax^{n+1} + Bx^n + 1$, să se împartă exact cu $(x - 1)^2$. În acest caz să se determine câtul împărțirii.

● 45. Să se arate că restul împărțirii polinomului $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ cu $x^2 + 1$ este $(a_{n-1} - a_{n-3} + a_{n-5} - \dots)x + (a_n - a_{n-2} + a_{n-4} - \dots)$.

● 46. Se cere câtul și restul împărțirii $(x^n - a^n) : (x^p - a^p)$. Care este condiția ca împărțirea să se facă exact?

● 47. Un polinom împărțit cu $x - a$ și $x - b$ dă respectiv câturile $x^2 - 4x + 5$ și $x^2 - 6x + 3$. Să se găsească acest polinom și numerele a și b , știind că termenul liber este 1.

● 48. Să se determine polinomul $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, cu coeficienți complecși, astfel ca $f(x^2)$ să fie divizibil cu $f(x)$ și $f(-x)$.

● 49. Se cere să se afle forma generală a unui polinom divizibil cu derivata lui.

● 50. Să se împartă $x^{2n} - 2x^n \cos n\alpha + 1$, prin $x^2 - 2x \cos \alpha + 1$.

● 51. Să se verifice (prin împărțire) că

$$x^n \sin \varphi - r^{n-1} x \sin n\varphi + r^n \sin (n - 1)\varphi$$

este divizibil prin $x^2 - 2rx \cos \varphi + r^2$.

● 52. Să se afle cîtul împărțirii polinomului $P(x) = (x - 2)^m + (x - 1)^n - 1$ prin $x - 2$.

● 53. Fie p și q două numere întregi oarecare. Să se arate că polinomul

$$(x - 1)^{2p}4^{-p} + (x + 1)^q2^{-q} - 1$$

este divizibil prin $x^2 - 1$ și să se calculeze cîtul.

● 54. Fie $f(x) = x^3 + \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}x^2 - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}x - 1$, $i = \sqrt{-1}$.

Să se verifice că polinomul $f(x^2)$ este divizibil cu $f(x)$. Ce relație există între cîtul $g(x)$ al împărțirii și $f(x)$?

● 55. Să se arate că $E_n(x) = (x + y + 1)^n - x^n - y^n - 1$ este divizibil prin produsul $(x + y)(x + 1)(y + 1)$, dacă n este un număr întreg impar. Să se descompună E_3 într-un produs de trei factori.

● 56. Să se arate că un polinom simetric în variabilele x, y , dacă se divide cu $(x - y)^{2k-1}$, se divide și cu $(x - y)^{2k}$.

Să se găsească c.m.m.d.c., al polinoamelor:

● 57. $P(x) = x^8 + x^7 - 2x^6 - 3x^5 + 3x^3 + 2x^2 - x - 1$,
 $Q(x) = 8x^7 + 7x^6 - 12x^5 - 15x^4 + 9x^2 + 4x - 1$.

● 58. $x^6 - 7x^5 + 15x^4 - 40x^2 + 48x - 16$, $6x^5 - 35x^4 + 60x^3 - 80x + 48$.

● 59. $x^4 - 4x^3 + 1$, $x^3 - 3x^2 + 1$.

● 60. $3x^6 - x^5 - 9x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 3x - 1$, $3x^5 + 8x^4 + 9x^3 + 15x^2 + 10x + 9$.

● 61. Fiind date polinoamele $P_1(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, $P_2(x) = 2x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 5x + 3$, să se afle polinoamele $A(x)$ și $B(x)$, de cele mai mici grade posibile, așa ca să avem $P_1(x)B(x) + P_2(x)A(x) \equiv 0$.

● 62. Să se găsească două polinoame cunoscînd suma și c.m.m.m.c al lor.

● 63. Să se afle polinoamele $A(x)$ și $B(x)$, respectiv de gradele $n - 2$ și $n - 1$, așa ca să avem $(1 + x + x^n)A(x) + (1 + nx^{n-1})B(x) \equiv 1$.

Să se determine polinomul de interpolare Lagrange, de grad minim, care trece prin punctele:

● 64. $(-1, -1)$, $(0, -1)$, $(1, -1)$, $(2, 5)$.

- 65. $(-2, 15), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 15)$.
- 66. $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 30)$.
- 67. Să se determine restul împărțirii unui polinom $P(x)$ prin $(x - a)(x - b)(x - c)$, cunoscând resturile împărțirilor cu $x - a$, $x - b$ și $x - c$.

Să se descompună în fracții simple, fracțiile raționale

- 68. $\frac{2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x + 2}{(x - 1)^3(x^2 + x + 1)}$.
- 69. $\frac{x^4}{x^3 + 1}$.
- 70. $\frac{1}{x^4 + 1}$.
- 71. $\frac{x^5 + x^4 - 2x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)^3}$.
- 72. $\frac{x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 4}{(x - 1)^3(x - 2)}$.
- 73. $\frac{1}{(x + 1)^7 - x^7 - 1}$.
- 74. $\frac{x^4 + a}{(x^2 - x + 1)^m}$.
- 75. Să se descompună fracția rațională $\frac{1}{P(x)}$ în forma

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{Ax + B}{P_1(x)} + \frac{Cx + D}{P_2(x)}.$$

A, B, C, D fiind constante reale, iar $P_1(x), P_2(x)$ două polinoame de gradul doi în x cu coeficienți reali și așa ca $P(x) = P_1(x)P_2(x)$.

- 76. $P(x)$ fiind un polinom de grad cel mult $n - 2$, iar $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$, numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$ fiind diferite, descompunând în elemente simple cîțul celor două polinoame, să se arate că avem

$$\frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} + \frac{P(a_2)}{Q'(a_2)} + \dots + \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} = 0.$$

- 77. Să se calculeze suma

$$S = \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Cît este $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$?

- 78. Să se calculeze

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{10k-3}{(5k-4)^2(5k+1)^2}$$

Să se arate că $S_n < \frac{1}{5}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

- 79. Să se verifice identitățile dintre funcțiile hiperbolice din § 7.1, din Cap. I, pe baza definiției acestor funcții și apoi ținînd seama de relațiile dintre aceste funcții și funcțiile circulare.

- 80. Știind că $\log_{12} 2 = a$, să se calculeze $\log_6 16$.

- 81. Știind că $\log_6 2 = a$ și $\log_6 5 = b$, să se calculeze $\log_3 5$.

- 82. Știind că $\lg 2 = 0,301$, să se calculeze $\lg 125$.

- 83. Să se arate că $\frac{\log_a N}{\log_{ak} N} = 1 + \log_a k$.

- 84. Să se arate că $\log_{a_1 a_2 \dots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}$

- 85. Să se arate că $\log_a N = \log_{a^n} (N^n)$.

- 86. Să se arate că avem

$$\begin{aligned} \log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N &= \\ &= \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}. \end{aligned}$$

- 87. Dacă $y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}}$ și $z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}$ să se arate că $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$.

- 88. Să se arate că avem

$$\frac{1}{\log_a N} + \frac{1}{\log_{a^2} N} + \frac{1}{\log_{a^3} N} + \frac{1}{\log_{a^4} N} + \frac{1}{\log_{a^5} N} = 15 \log_N a.$$

- 89. Să se arate că avem

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \frac{1}{\log_4 a} + \frac{1}{\log_5 a} = \frac{1}{\log_{120} a}.$$

- 90. Să se arate că $xyz - (x + y + z)(yz + zx + xy)$ este divizibil cu $x + y$ și apoi să se descompună în factori. Să se deducă de aici relația dintre a, b, c , așa ca $\log_a x + \log_b x + \log_c x = \log_{abc} x$.

- 91. Să se verifice identitatea lui *Lagrange*

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \equiv \sum (a_i b_k - a_k b_i)^2.$$

În ce condiții avem identitatea

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \equiv 0?$$

- 92. Să se verifice identitatea lui *Euler*

$$(ax + by + cz + dt)^2 + (bx - ay + dz - ct)^2 + (cx - dy - az + bt)^2 + (dx + cy - bz - at)^2 \equiv (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2).$$

Să se verifice identitățile

● 93.
$$\frac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} = (a+b+c)^2.$$

● 94.
$$1 + \frac{1}{a_1} + \frac{a_1 + 1}{a_1 a_2} + \frac{(a_1 + 1)(a_2 + 1)}{a_1 a_2 a_3} + \dots + \frac{(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1)}{a_1 a_2 \dots a_{n+1}} \equiv \frac{(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_{n+1} + 1)}{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}.$$

● 95. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$

● 96.
$$U_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p + 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (p+1) + \dots + (m+1)(m+2) \dots (m+p) \equiv \frac{(m+1)(m+2) \dots (m+p+1)}{p+1}.$$

- 97. Să se dovedească direct și prin inducție completă formula

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Să se calculeze sumele

● 98. $1^2 + 5^2 + \dots + (4n - 3)^2$.

● 99. $\sum_{k=1}^n (2k - 1)^3; \sum_{k=1}^n (k + 1)(k - 1)$.

● 100. $1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + (2n - 1)(2n + 1)(2n + 3)$.

● 101. Să se demonstreze identitatea

$$S_n = (1 + x)(1 + qx) \dots (1 + q^{n-1}x) = 1 + \frac{q^n - 1}{q - 1}x + \dots + \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})}{(q - 1)(q^2 - 1) \dots (q^n - 1)}x^n.$$

● 102. Să se arate că proporția $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, implică

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1, \quad \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} = 1, \quad \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

● 103. Să se arate că dacă $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 1$, atunci

$$\frac{b^2 - c^2}{bc - 1} + \frac{a^2 - c^2}{ac - 1} + \frac{a^2 - b^2}{ab - 1} = 2b(a - c).$$

● 104. Să se arate că dacă $abc = 1$, atunci

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 = 4 + \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right).$$

● 105. Să se demonstreze implicația

$$(ab + bc + ca = 1) \Rightarrow \frac{a}{1 - a^2} + \frac{b}{1 - b^2} + \frac{c}{1 - c^2} = \frac{4abc}{(1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)}.$$

● 106. Să se demonstreze implicația

$$(aa' = bb' = cc') \Rightarrow (a + b')(b + c')(c + a') = (a' + b)(b' + c)(c' + a).$$

- 107. Să se stabilească implicația $a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Să se deducă apoi că $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$ și să se calculeze

$$E = \frac{(b - c)^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{(c - a)^2}{(b - c)(b - a)} + \frac{(a - b)^2}{(c - b)(c - a)}.$$

- 108. Să se arate că din egalitatea $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$, rezul-

$$\begin{aligned} \text{tă } \frac{1}{a^{2n+1}} + \frac{1}{b^{2n+1}} + \frac{1}{c^{2n+1}} &= \frac{1}{a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}} = \frac{1}{(a + b + c)^{2n+1}} = \\ &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^{2n+1}. \end{aligned}$$

- 109. Să se determine parametrul λ , astfel ca polinomul $P(x) = 8x^4 - 4x^3 - 2(3 + 4\lambda^2)x^2 + (4\lambda^2 - 3\lambda + 5)x + 3 - \lambda$, să fie pozitiv pentru rădăcinile ecuației $4x^2 + 4\lambda x - 1 = 0$.

- 110. Să se arate că, oricare ar fi numărul real a , are loc inegalitatea

$$\left| \frac{2a - 1}{a^2 + 1} \right| < 2.$$

- 111. Să se arate că oricare ar fi numerele pozitive a, b, c , are loc inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

- 112. Să se arate că 'avem $n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) > (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$

- 113. Să se arate că valoarea absolută a unei sume nu este mai mare decât suma valorilor absolute ale termenilor, deci $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$, unde $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt numere complexe.

- 114. Oricare ar fi numerele $a_1, a_2, \dots, a_n$, să se arate că avem $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.

- 115. Să se dovedească inegalitatea

$$\begin{aligned} |\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} - \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}| &\leq |a_1 - b_1| + \\ &+ |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n|. \end{aligned}$$

- 116. Să se dovedească inegalitatea lui *Buniakovski - Cauchy - Schwarz*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

- 117. Pentru orice numere reale, avem

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

- 118. Să se dovedească inegalitatea lui *Bernoulli* $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, unde $n \geq 1$ este un număr natural, iar $x > -1$.

- 119. Dacă numărul natural n este mai mare decât unitatea, să se arate că avem $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} > 0$.

- 120. Fiind date numerele pozitive $x_1, x_2, \dots, x_n$, se numește *medie*, sau *valoare medie*, orice expresie formată cu aceste numere, astfel încât ea să fie cuprinsă între cel mai mic și cel mai mare dintre acestea. Mediile cel mai des întâlnite sînt

$$\text{media aritmetică } A_n(x) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

$$\text{media geometrică } G_n(x) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$\text{media armonică } H_n(x) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Să se arate că avem inegalitățile

$$\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq H_n(x) \leq G_n(x) \leq A_n(x) \leq \max \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

- 121. Să se calculeze suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \dots + \frac{1}{x}$.

- 122. Într-o progresie aritmetică, în care al n -lea termen este a_n și suma primilor n termeni S_n , avem $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m}{n}$. Să se arate că $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

● 123. Să se găsească o progresie aritmetică astfel încît raportul dintre primii ei n termeni și următorii ei kn termeni, să fie independent de n .

● 124. Suma a 7 termeni dintr-o progresie geometrică cu rația 2 este egală cu 635. Să se găsească primul și ultimul termen.

● 125. Dacă a, b, c sînt termenii unei progresii geometrice, să se arate că avem

$$\frac{1}{3} \leq \frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 - bx + c} \leq 3.$$

● 126. Dacă $s_n = \sum_{k=0}^n x^k$, să se împartă $s_n^2 - x^n$ cu $s_{n+1} s_{n-1}$.

● 127. Să se calculeze suma

$$s = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ cifre}}.$$

● 128. Să se determine funcția λ , astfel ca să avem

$$\frac{1}{1-x} \equiv 1 + x + \dots + x^n + \lambda x^{n+1}.$$

● 129. Să se determine restul $R(x)$, astfel încît să avem identitatea

$$\frac{x^n + 1}{x - 1} \equiv x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^{n-h} + R(x).$$

● 130. Să se afle patru numere, așa ca primele trei să formeze o progresie geometrică, iar ultimele trei o progresie aritmetică. Se mai știe că suma primului și ultimului număr este 14, iar suma celorlalți doi este egală cu 12.

● 131. Într-o progresie aritmetică sînt 11 termeni. Primul termen este egal cu 24. Primul, al 4-lea și ultimul formează o progresie geometrică. Să se afle toți termenii.

● 132. Se pot determina trei numere x, y, z , care să fie simultan în ordine primii trei termeni atît ai unei progresii aritmetice, cît și ai unei progresii geometrice?

● 133. Să se afle o progresie geometrică infinită în care fiecare termen este de două ori mai mic decât suma tuturor termenilor ce urmează după el. Se mai știe că al 5-lea termen este 16.

● 134. Să se afle limita expresiei

$$\sqrt[3]{3 \sqrt[5]{5 \sqrt[3]{3 \sqrt[5]{5} \dots}}}$$

Cap. II. Analiza combinatorie

● 1. Fie n puncte distincte pe un cerc. 1° Să se afle numărul dreptelor determinate de aceste puncte. 2° Să se afle numărul triunghiurilor care au vîrfurile în aceste puncte. 3° Admițînd că printre dreptele de la punctul 1° nu există drepte paralele, se cere să se afle în cîte puncte se mai intersectează aceste drepte (în afară de cele n puncte date).

● 2. Cîte numere de cinci cifre distincte putem forma cu cifrele 2, 3, 4, 5, 6? Care este suma acestor numere? Presupunîndu-le așezate în ordine crescătoare, al cîtelea loc ocupă în acest șir numărul 42536?

● 3. Considerăm numerele de 5 cifre formate cu cifrele distincte 1, 2, 3, 4, 5.

1. Să se calculeze suma acestor numere.

2. Să se calculeze suma pătratelor acestor numere.

● 4. Cîte numere de șapte cifre se pot forma cu cifrele 2, 3, 4, 5, prima apărînd de trei ori, a doua de două ori și ultimele două cîte o dată? Care este suma lor? Ordonînd crescător numerele de mai sus, al cîtelea este numărul 4352223?

● 5. Să se arate că numărul total al inversiunilor I_n pe care-l au toate permutările primelor numere naturale, satisface relația

$$I_n = \frac{1}{2} P_n C_n^2$$

● 6. Să se dezvolte polinomul

$$P_n(x) = \frac{1}{2} [(x+a)^n + (x-a)^n].$$

Să se calculeze suma coeficienților în cazul cînd $a = 1$. Punînd $a^2 = x^2 - 1$, $P_n(x)$ devine noul polinom $Q_n(x)$. Să se calculeze suma coeficienților lui $Q_n(x)$ și punînd $x = \cos t$, să se calculeze rădăcinile lui. Să se stabilească relația

$$Q_n(x) + Q_{n-2}(x) = 2xQ_{n-1}(x).$$

- 7. Să se dovedească identitățile

$$1^\circ \quad 1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n+1)}{2!} + \dots + \frac{n(n+1) \dots (n+p-1)}{p!} \equiv \\ \equiv \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+p)}{p!},$$

$$2^\circ \quad 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{2!} - \dots + (-1)^p \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!} \equiv \\ \equiv (-1)^p \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-p)}{p!},$$

unde p este un număr natural, iar n este un număr oarecare.

- 8. Să se arate că avem:

$$\frac{C_k^1 \cdot C_{2k}^2 \cdot C_{3k}^3 \dots C_{nk}^n}{C_{k-1}^1 C_{2k-1}^2 C_{3k-1}^3 \dots C_{n-k+1}^n} = \left(\frac{k}{k-1} \right)^n.$$

- 9. Să se calculeze

$$S = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^p)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$

- 10. Să se demonstreze relația:

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

- 11. Să se calculeze

$$S_n = C_n^0 - 3C_n^2 + \dots + (-1)^k 3^k C_n^{2k}$$

cu $k = p$ și $n = 2p$ sau $n = 2p + 1$.

- 12. Să se rezolve ecuația

$$11C_x^3 = 24 C_{x+1}^2.$$

- 13. Să se afle coeficientul lui x^{12} din dezvoltarea

$$(10x^2 + 15x - 12)(x + 1)^{15}.$$

- 14. Să se determine x și n din expresia:

$$\left(x^A + \frac{1}{x} \right)^n, \text{ unde } A = \frac{\log_a x}{2},$$

știind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este 128, iar al șaselea termen din dezvoltare este egal cu $\frac{21}{a^4}$.

- 15. Să se afle restul împărțirii după puterile crescătoare ale lui $P(x) = (\cos \alpha + x \sin \alpha)^n$, prin $x^2 + 1$ (La cât se va obține un polinom de gradul $n - 2$).

Cap. III. Numere complexe

- 1. Să se calculeze $(\sqrt{3} + i)^{73}$.
- 2. Să se calculeze $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{60}$.
- 3. Să se arate că $[2a - b - c + (b - c)\sqrt{3}i]^3 = [2b - c - a + (c - a)\sqrt{3}i]^3$.
- 4. 1° Să se arate $\forall a \in \mathbf{R}$, numărul complex $z = \frac{1 + ia}{1 - ia}$ are ca modul 1.
 2° Reciproc, fiind dat un număr complex z de modul 1, să se studieze dacă e posibil de a fi scris sub forma $\frac{1 + ia}{1 - ia}$ și să se exprime a în funcție de argumentul z .
 3° Să se arate că ecuația $(1 + ix)^n = i(1 - ix)^n$ admite n rădăcini reale și să se determine aceste rădăcini. Să se arate că această ecuație nu admite alte rădăcini în corpul numerelor complexe.
- 5. Să se construiască ecuația care are ca rădăcini valorile lui $\operatorname{tg} \frac{a}{5}$, cunoscând că $\operatorname{tg} a = b$.
- 6. Utilizând formula lui Moivre să se calculeze $\cos 5x$ și $\sin 5x$ respectiv în funcție de $\cos x$ și $\sin x$. Să se deducă apoi valoarea exactă a lui $\sin \frac{\pi}{5}$ și $\cos \frac{\pi}{10}$.
- 7. Să se calculeze în două moduri expresiile $(1 + i)^n$ și $(1 - i)^n$. Să se deducă apoi valoarea sumei $S_n = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots + (-1)^p C_n^{2p} + \dots$, $(2p < n)$. Să se calculeze în particular $S_{100} = 1 - C_{100}^2 + C_{100}^4 - \dots + C_{100}^{100}$.

- 8. Să se calculeze $P = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)(\cos c + i \sin c)$. Să se deducă apoi valorile lui $\cos(a + b + c)$ și $\sin(a + b + c)$.
- 9. Să se descompună în factori suma $S = (a + bw + cw^2)^3 + (a + bw^2 + cw)^3$ unde w este o rădăcină primitivă cubică a unității.
- 10. Să se descompună într-un produs de polinoame cu coeficienți complecși, polinomul $P_m(x) = \left(1 + \frac{ix}{m}\right)^m - \left(1 - \frac{ix}{m}\right)^m$.
- 11. Să se afle modulul și argumentul numărului $N = a \frac{1 + ib}{1 - ib}$, unde $a \in \mathbb{C}$ și $b \in \mathbb{R}$.
- 12. Dacă x și y sînt numere complexe, să se arate că avem $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.
- 13. Să se afle toate numerele complexe z , pentru care $\left(\frac{z - i - 1}{iz + 1}\right)^2$ este real.
- 14. Să se determine numerele complexe z , astfel ca 0 să fie centrul cercului circumscris triunghiului format de imaginile lui z , z^2 , z^3 .
- 15. Să se determine numerele complexe z , astfel ca 0 să fie centrul de greutate al imaginilor numerelor z , z^2 și z^3 .
- 16. Să se calculeze rădăcinile de ordinul patru, ale numărului $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.
- 17. Să se calculeze expresia $E = (aw + bw^2)(aw^2 + bw)$, unde $w = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.
- 18. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor $x^{99} - 1$ și $x^{45} - 1$ și apoi cel al polinoamelor $x^{99} + 1$ și $x^{45} + 1$.
- 19. În ce condiții polinoamele $x^m + x^{m-1} + \dots + x + 1$ și $x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$ au rădăcini comune. În ce caz al doilea polinom divide pe primul polinom.
- 20. Se consideră polinoamele $A = 1 - x^n + x^{2n} - x^{3n} + x^{4n}$ și $B = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$. Pentru ce valori întregi ale lui n avem A divizibil cu B ?

- 21. Să se determine A și B astfel ca polinomul $Ax^{n+2} + Bx^{n+1} + x \cos(\alpha + \theta) - \cos \alpha$, să fie divizibil cu $x^2 - 2x \cos \theta + 1$.
- 22. Să se arate că polinomul $P(x) = x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2}$, este divizibil cu $x^2 + x + 1$.
- 23. Să se determine p, q așa ca $x^8 + x^4 + 1$, să dividă polinomul $P = x^{8m} + px^{4m} + q$ (m întreg > 0).
- 24. Fie z_1, z_2, z_3 , rădăcinile ecuației $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Să se arate că $(z_1 + jz_2 + j^2z_3)^3$, unde j este o rădăcină primitivă cubică a unității, nu poate lua decît două valori distincte cînd se permută z_1, z_2, z_3 în toate felurile posibile. Să se formeze ecuația de gradul doi, care admite aceste două valori ca rădăcini.
- 25. Să se rezolve ecuația $x^7 - 1 - i\sqrt{3} = 0$.
- 26. Să se rezolve ecuația $(z + 1)^3 + i(z - 1)^3 = 0$.
- 27. Să se rezolve ecuația $x^{24} - 1 = 0$.
- 28. Să se rezolve ecuația $x^3 + 3x + 2i = 0$.
- 29. Să se rezolve ecuația $x^6 + x^3(x + 1)^3 + (x + 1)^6 = 0$.
- 30. Să se rezolve ecuația $x^n - nax^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2!}a^2x^{n-2} - \dots - a^n = 0$.
- 31. Să se rezolve sistemul $iz - 2\omega = -4 + 3i$; $2\bar{\omega} + \bar{z} = 3$.
- 32. Să se determine a, b, c și m astfel ca $P(z) = P(mz + 1)$, pentru $P(z) = az^3 + bz^2 + cz$.
- 33. Fie $z = x + iy$, $f(z) = \operatorname{ch} z - 1$. Să se arate că $|f(x + iy)| = |f(x)| + |f(iy)|$. Aceeași chestiune pentru $f_1(z) = \cos z - 1$.
- 34. În cîmpul numerelor reale să se descompună în factori polinomul $x^{2n} - 1$. Împărțind identitatea obținută cu $x^2 - 1$, să se obțină

identitatea trigonometrică $\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

● 35. Punem $\alpha_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ ($k, n \in \mathbf{N} - \{0\}$). Să se calculeze $P = \prod_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - 1)$.

Să se deducă de aici $S = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

Cap. IV. Ecuații și inecuații cu o singură necunoscută

Să se rezolve ecuațiile

$$\bullet \quad 1. \quad \frac{4x-1}{325} - \frac{(x-2)(7x+3)}{1365} - \frac{x+12}{455} = \frac{2x-1}{315} - \frac{(5x-1)(3x-2)}{2925} - \frac{3}{105}.$$

$$\bullet \quad 2. \quad \frac{3}{x-1} + \frac{9}{x-3} - \frac{275}{x-5} + \frac{343}{x-7} = 0.$$

$$\bullet \quad 3. \quad \frac{(2a+b)b^2}{a(a+b)^2}x + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} = 3cx + \frac{b}{a}x - \frac{3abc}{a+b},$$

$(a \neq 0, a \neq -b).$

$$\bullet \quad 4. \quad (x-a)^3(b-c) + (x-b)^3(c-a) + (x-c)^3(a-b) = 0, \\ a, b, c \text{ diferite.}$$

$$\bullet \quad 5. \quad [(a^2 - b^2)x - ab][a - (a+b)x] + 2ab^2x = [(a+b)^2x + ab] \cdot [b - (a-b)x].$$

$$\bullet \quad 6. \quad (a^2 - b^2 + 2b - 1)x^2 - 2(a^2 + b^2 + a - b)x + a^2 - b^2 + 2a + 1 = 0.$$

$$\bullet \quad 7. \quad \text{Se consideră polinoamele: } F(x) = x^2 - (a+b)x + ab, f(x) = 2x - (a+b).$$

1° Să se arate că $f(x)$ ia valori opuse când x ia valori egale cu rădăcinile polinomului $F(x)$.

2° Se notează $x_1 = \frac{a+b}{2} + m$ și $x_2 = \frac{a+b}{2} - m$. Să se arate că

oricare ar fi m , avem $F(x_1) = F(x_2)$ și $f(x_1) = -f(x_2)$.

3° Să se arate că ecuația $F(x) + kf(x) = 0$ are rădăcini reale oricare ar fi k real.

~~8.~~ Se dă ecuația $mx^2 - (m-2)(m^2+1)x + m(m-2)^2 = 0$ unde m este un parametru real. 1° Să se arate că discriminantul ecuației

este un pătrat perfect. 2° Să se exprime în funcție de m rădăcinile ecuației date.

● 9. Se dă ecuația $x^2 \sin \alpha - 2x \cos \alpha - 1 + \sin \alpha = 0$ unde α este un parametru.

1° Să se determine rădăcinile ecuației pentru $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

2° Să se determine α astfel ca $x_1 = x_2 = -\sqrt{3}$.

● 10. Se dă ecuația: $(m+2)^2 x^2 - (3m^2 + 4m - 4)x + 2m^2 + m - 15 = 0$ unde $m \neq -2$ cu rădăcinile x_1, x_2 . Se cere:

1° Să se rezolve ecuația.

2° Să se determine valorile lui m pentru care $x_1 = x_2$.

3° Să se afle x_1 și x_2 pentru $m = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$.

4° Să se găsească o relație independentă de m între x_1 și x_2 .

● 11. Se dă ecuația $x^2 - x + m + 1 = 0$,

1° Să se construiască ecuația de gradul doi în z ale cărei rădăcini sînt legate de rădăcinile ecuației date x_1, x_2 prin relațiile

$$z_1 = \frac{x_1}{1 + x_2}; \quad z_2 = \frac{x_2}{1 + x_1}.$$

2° Să se determine m astfel încît ecuația în z să aibă:

- a) rădăcini reale și diferite,
- b) rădăcini egale,
- c) o rădăcină egală cu zero.

● 12. Să se construiască ecuația de gradul doi ale cărei rădăcini verifică relațiile

$$4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) = -4, \quad (x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{1 + a}.$$

Să se determine a astfel ca

$$x_1^2 + x_2^2 = 11.$$

● 13. Între rădăcinile x_1 și x_2 ale unei ecuații de gradul doi există relațiile:

$$x_1 - x_2 = \frac{4\sqrt{a-1}}{a-2} \quad \text{și} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{a + 2\sqrt{a-1}}{a - 2\sqrt{a-1}}.$$

- a) Să se determine ecuația de gradul doi cu rădăcinile x_1 și x_2 .
 b) Să se discute natura rădăcinilor când parametrul real a variază.

● **14.** Se consideră ecuația (1) $x^2 - 2mx + 1 = 0$.

1° Să se studieze rădăcinile x' și x'' după valorile lui m .

2° Să se construiască ecuația (2) care are rădăcinile:

$$y' = x' - \frac{3}{x'}; \quad y'' = x'' - \frac{3}{x''}.$$

3° O rădăcină a ecuației (1) poate fi egală cu o rădăcină a ecuației (2)? Să se deducă valorile lui m pentru care ecuațiile (1) și (2) au o rădăcină comună.

● **15.** O ecuație de gr. II are rădăcinile x_1 și x_2 astfel ca

$$\begin{cases} mx_1 + mx_2 - m = 4 - 2x_1 - 2x_2 \\ mx_1x_2 + m = 2 - 2x_1x_2. \end{cases}$$

1° Să se construiască ecuația dată, coeficienții fiind exprimați în funcție de m .

2° Să se arate că între rădăcini există o relație independentă de m .

3° Să se folosească această relație pentru a determina rădăcinile duble ale ecuației obținute.

4° Ce condiție trebuie să satisfacă m pentru ca rădăcinile ecuației să fie pozitive?

● **16.** Notînd cu x_1 și x_2 rădăcinile ecuației

$$x^2 - 2x \cos \alpha + \cos 2\alpha = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

să se verifice identitatea

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} \right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \right)^2 \equiv -4 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{cosec} 2\alpha.$$

● **17.** Se dă ecuația $x^4 - 6mx^2 + (m+1)^2 = 0$, unde m este un parametru real.

1° Să se rezolve ecuația și să i se scrie rădăcinile sub forma cea mai simplă.

2° Să se discute natura rădăcinilor ecuației după valorile parametru-lui m .

3° Fie $x_1, -x_1, x_2, -x_2$ rădăcinile ecuației. Să se scrie ecuația de gr. II care are drept rădăcini pe x_1^2 și x_2^2 . Să se calculeze

$$E = \frac{x_1^4}{x_1^4 + m} + \frac{x_2^4}{x_2^4 + m}.$$

4° Să se determine m astfel ca $E = 1$.

● 18. Fie $P(x, m) = mx^2 - 2(m - 3)x + m + 3$, $m \neq 0$. Notăm cu $x_1(m), x_2(m)$ rădăcinile ecuației $P(x, m) = 0$.

1° Să se arate că între $x_1(m)$ și $x_2(m)$ există o relație independentă de m .

2° Să se găsească valorile lui m astfel încât $x_1(m) = \frac{1}{\cos a}$; $x_2(m) = \frac{1}{\sin a}$.

3° Să se arate că există un x_0 astfel încât $P(x_0, m)$ să nu depindă de m .

● 19. Se dă ecuația $x^2 + px + q = 0$. Să se găsească p, q și rădăcinile x_1 și x_2 ale ecuației, dacă $x_1 + 1$ și $x_2 + 1$ sînt rădăcinile ecuației $x^2 - px + q = 0$.

● 20. Se dă ecuația $x^2 - 2(1 + 2m)x + 3 + 4m = 0$; $m \in \mathbb{R}$.

1° Să se studieze în funcție de m , existența și semnul rădăcinilor.

2° Să se arate că există între rădăcini o relație independentă de m .

3° Să se calculeze în funcție de m suma cuburilor rădăcinilor.

4° Să se determine valorile lui m pentru care o rădăcină este egală cu triplul celeilalte rădăcini. Să se calculeze rădăcinile în acest caz.

5° Să se construiască ecuația în y care admite ca rădăcini

$$y_1 = x_1^2 \text{ și } y_2 = x_2^2,$$

x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației date.

● 21. Să se construiască ecuația de gradul II ale cărei rădăcini verifică relațiile

$$4x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 = 0, \quad (x_1 - 1)(x_2 - 1) = \frac{1}{1 - a}.$$

Să se determine parametrul a , astfel încât $x_1, x_2 \in [-1, 1]$.

● 22. Să se determine valoarea parametrului m pentru care, suma pătratelor rădăcinilor ecuației $x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$ are cea mai mică valoare.

● 23. Se dă ecuația $x^2 \cos^2 \alpha - x + \sin^2 \alpha = 0$.

1° Să se rezolve ecuația.

2° Să se determine valorile lui α pentru care

$$a) x_1^2 + x_2^2 - 10 = 0. \quad b) \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 4.$$

● 24. Fie un sistem de axe perpendiculare Ox și Oy și un punct $M(x, y)$ în planul lor. Punctului M i se asociază ecuația în u :

$$E \equiv u^2 - 2(x+1)u + y + x^2 + 3 = 0.$$

1° Să se determine mulțimea punctelor M pentru care ecuația E are două rădăcini egale.

2° Să se determine mulțimea punctelor M pentru care ecuația E are o rădăcină nulă.

3° Să se determine mulțimea punctelor M pentru care ecuația E are două rădăcini opuse.

● 25. Se dă ecuația $(2m-1)x^2 - (m+1)x + m-2 = 0$, în care m este un parametru real.

1° Să se studieze natura și semnele rădăcinilor în raport cu m .

2° Considerînd punctele M_1 și M_2 pe o axă cu originea în O astfel ca $\overline{OM_1} = x_1$ și $\overline{OM_2} = x_2$, x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației date,

a) Să se determine m astfel ca punctele M_1 și M_2 să fie simetrice față de un punct A de abscisă -1 . Să se afle în acest caz abscisele punctelor M_1 și M_2 ;

b) Să se determine m astfel ca M_1 și M_2 să fie conjugate armonic în raport cu punctele $A(-1)$ și $B(+1)$.

● 26. Fiind dat polinomul

$$P(x) = (m^2 - 3m + 2)x^2 + (m - 2)x + 3$$

să se determine mulțimea valorilor lui m pentru care: a) ecuația $P(x) = 0$ are o singură rădăcină finită; b) ecuația $P(x) = 0$ are o rădăcină dublă; c) inecuația $P(x) > 0$ nu are soluții; d) $P(1)$ și $P(-2)$ sînt ambele pozitive.

● 27. Să se determine mulțimile valorilor lui m pentru care polinomul $P(x) = (m-1)x^2 + 2(m+3)x + m$ este: a) pozitiv pentru orice valoare a lui x ; b) nul pentru o singură valoare a lui x ; c) pozitiv pentru $x = 2$ și negativ pentru $x = -\sqrt{5}$.

● 28. Să se determine pentru ce valoare a lui m punctele A și B de abscise x' și x'' , rădăcinile ecuației $mx^2 + 2(m-1)x + m-3 = 0$,

sînt conjugate armonic în raport cu punctele C și D de abscise respectiv $+1$ și $+4$.

● 29. Fiind dată ecuația $f(x) = (m - 3)x^2 + 2(m - 2)x + m + 1 = 0$ și numărul $\alpha = 1$, se cere: 1° Să se examineze, în funcție de valorile lui m , natura rădăcinilor ecuației; 2° Să se afle ordinea de mărime a numerelor x_1 , x_2 , 1, unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației.

● 30. Se dă ecuația $f(x) \equiv (m - 1)x^2 + (2m - 3)x + m + 1 = 0$ și numerele $\alpha = -2$, $\beta = 1$. În funcție de parametrul m , să se examineze poziția numerelor α și β , față de rădăcinile x_1 , x_2 ale ecuației.

● 31. Să se discute natura și semnele rădăcinilor ecuației: $(K - 15)x^2 - 4Kx + K - 6 = 0$. Pentru ce valori ale parametrului K ecuația are o rădăcină, sau ambele rădăcini mai mari decît 2.

● 32. Să se determine m astfel ca rădăcinile ecuației $\frac{3x^2 - x + 2}{x + 3} = -m$, să satisfacă relațiile $x_1 < 2$; $x_2 > 3$.

● 33. Se dă ecuația $3(5x^2 + 2) - K(x^2 - 4x + 1) = 0$. Să se determine parametrul K astfel încît rădăcinile ecuației să satisfacă relațiile $2 < x_1 < x_2$.

● 34. Să se determine m astfel ca rădăcinile ecuației $(m - 1)x^2 - 2(m - 3)x + m - 8 = 0$, să fie cuprinse în intervalul $(-1; 5)$.

● 35. Să se studieze, după valorile lui m , locul numerelor 2 și 3 în raport cu rădăcinile ecuației $(m - 2)x^2 - 2(m - 4)x + m^2 - 2m - 8 = 0$.

● 36. Să se studieze, după valorile parametrului m , locul numerelor $-\frac{1}{2}$ și 1 în raport cu rădăcinile ecuației $m(m - 3)x^2 - 2m^2x + m^2 - \frac{3}{2} = 0$.

● 37. Fiind dată ecuația $x^2 + px + q = 0$, să se exprime condițiile necesare și suficiente pentru ca să aibă rădăcinile reale care satisfac una din condițiile 1° $0 < x_1 < 1 < x_2$; 2° $0 < x_1 < x_2 < 1$; 3° $x_1 < 0 < 1 < x_2$.

● 38. Să se determine valorile parametrului m astfel ca rădăcinile x' și x'' ale ecuației $(m + 1)x^2 - 3x + m - 2 = 0$ să satisfacă condițiile $-1 < x' < 1 < x'' < 2$.

● 39. Să se determine valorile parametrului m astfel ca ecuația $(m^2 - 1)x^2 - 4(m + 2)x + 3 = 0$, să aibă o singură rădăcină cuprinsă între numerele -1 și $+1$.

● 40. Fiind dată ecuația $(2m - 1)x^2 - (m + 1)x + m - 2 = 0$, să se afle: 1° O relație între rădăcinile x_1, x_2 ale ei, independentă de parametrul m ; 2° ecuația care are ca rădăcini $\frac{1 - x_1}{1 + x_1}$ și $\frac{1 - x_2}{1 + x_2}$, 3° numărul rădăcinilor cuprinse în $(-1, 1)$.

● 41. Să se arate că pentru orice m nenegativ, ecuația $F(x) = 2(m + 2)^2 x^2 + 2(m + 1)(m + 2)x - m = 0$, admite o rădăcină pozitivă subunitară.

Să se rezolve ecuațiile

● 42. $z^2 - 2e^{it}z + 1 = 0$, t real.

● 43. $(x^3 - 3x - 1)^2 + 4(x^3 - 3x) - 1 = 0$.

● 44. $z^3 - z^2(1 + a + ia) + az(1 + i + ia) - ia^2 = 0$.

● 45. $x^4 + 2x^2 \cos \varphi + 1 = 0$.

● 46. $x^4 - (1 + 2i)x^2 + 1 - 5i = 0$.

● 47. $\frac{a + b}{x^2} + \frac{b}{x^2 - b} = \frac{a + b}{a}$.

● 48. $(x + 1)^6 + 20 = 9(x + 1)^3$.

● 49. $(1 - x^2)^3 + 8x^3 = 0$.

● 50. $z^6 - 2z^3 \cos \theta + 1 = 0$.

● 51. $15x^6 - 128x^5 + 275x^4 - 275x^2 + 128x - 15 = 0$.

● 52. $x^8 + 2x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1 = 0$.

● 53. $abx^4 - (a^2 + b^2 - ab)x^3 - (a - b)^2x^2 - (a^2 + b^2 - ab)x + ab = 0$.

● 54. $x^4 - 2(a + b)x^3 + (a^2 + b^2 + 4ab)x^2 - 2ab(a + b)x + a^2b^2 = 0$

● 55. $f(x) \equiv 24x^4 - 42x^3 - 77x^2 + 56x + 60 = 0$.

● 56. $210x^4 - 247x^3 + 101x^2 - 17x + 1 = 0$.

● 57. $x^{12} - 1 = 0$.

- 58. $f(x) = x^4 + x^3(2 + i) - x^2(1 + i) + x(5 + 2i) - 3 - i = 0$.
- 59. Să se examineze natura rădăcinilor ecuației $x^4 + ax^3 + ax + 1 = 0$.
- 60. Să se rezolve ecuația $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + \lambda x + \mu = 0$, știind că $1 + i$ este o rădăcină și că parametrii λ, μ sînt reali.
- 61. Să se arate că $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ verifică ecuația $x^3 = 6 + 6x$. Să se rezolve complet ecuația.
- 62. Să se rezolve ecuația $4x^3 - 3x - a = 0$ ($a > 1$), punînd $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.
- 63. Să se rezolve ecuația

$$x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720 = 0.$$

Dacă $x_1, x_2, \dots, x_6$ sînt rădăcinile ei așezate în ordine crescătoare, să se arate că punctele din plan $M_1(x_1, x_2), M_2(x_3, x_4), M_3(x_5, x_6)$ sînt coliniare.
- 64. Să se arate că rădăcinile ecuației $x^6 + 10mx^3 + 12m(m - 2)x + m(m^2 - 12m + 16) = 0$, se asociază două cîte două astfel ca $ab - 2(a + b) - m = 0$, unde a și b sînt cele două rădăcini.
- 65. Să se rezolve ecuația

$$x^{2n} + C_{2n}^2 x^{2n-2}(x^2 - 1) + C_{2n}^4 x^{2n-4}(x^2 - 1)^2 + \dots + (x^2 - 1)^n = 0.$$
- 66. Se dă ecuația $(m + 1)x^2 + 2(m - 2)x + m + 4 = 0$. Să se determine m astfel ca ecuația să admită ca rădăcini două numere distincte a și b . Să se arate că problema este posibilă dacă și numai dacă a și b verifică relația $2ab - a - b = 4$.
- 67. Ecuația cu coeficienți reali $ax^2 + bx + c = 0$, are rădăcinile complex conjugate. Notînd cu M_1 și M_2 imaginile lor, să se afle relația ce trebuie să existe între coeficienți, pentru ca triunghiul OM_1M_2 să fie dreptunghic în O .
- 68. Să se găsească patru numere care formează o proporție cunoscînd suma mezilor $2s$, suma extremilor $2s'$ și suma pătratelor celor patru termeni $4q^2$.
- 69. Condiția ca rădăcinile ecuației $z^2 + 2(a + ib)z + c + di = 0$, să aibă același argument.

- 70. Ecuația cu coeficienți reali $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ are rădăcina reală x_3 și rădăcinile complex conjugate x_1, x_2 . Notînd cu M_1, M_2, M_3 imaginile celor trei rădăcini, se cere să se afle condiția îndeplinită de coeficienții ecuației pentru ca triunghiul $M_1M_2M_3$ să fie dreptunghic în M_3 .
- 71. Care este ecuația de gradul al treilea în care fiecare rădăcină este egală cu produsul celorlalte două.
- 72. x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației $P(x) = x^3 + px + q = 0$, să se formeze ecuația ale cărei rădăcini sînt $(x_i - x_j)^2$, ($i \neq j$). Aplicație la discuția multiplicității și realității rădăcinilor lui $P(x) = 0$.
- 73. $P(x)$ fiind un polinom cu coeficienți complecși, să se determine rădăcinile lui $Q(x) = P(x) P(\varepsilon x) P(\varepsilon^2 x)$, și să se arate că este un polinom în x^3 (ε este o rădăcină primitivă cubică a unității).
- 74. Se dă ecuația $x^3 - 3\alpha x^2 + 3x - \alpha = 0$. Să se rezolve ecuația folosind transformata $x = \frac{1-y}{1+y}$.
- 75. Să se determine m și n astfel ca transformarea $y = \frac{x+m}{x+n}$, ($m \neq n$) să transforme ecuația $x^3 + px + q = 0$, într-o ecuație binomă.
- 76. Să se rezolve ecuația $P(z) \equiv 2z^3 + (1 - 6i)z^2 - (6 + i)z - 3 + i = 0$ știind că are o rădăcină reală. Să se descompună în factori cu coeficienți reali, polinomul $P(z)\overline{P}(z)$.
- 77. Să se arate că dacă ecuația de gradul n , $f(x) = 0$, are toate rădăcinile reale și distincte, atunci aceeași proprietate o are și ecuația $F(x) = f(x) + \alpha f'(x) = 0$, unde α este o constantă.
- 78. Să se arate că rădăcinile ecuației $z^3 + az^2 + 4z + a = 0$, unde a este un număr pozitiv, au partea reală negativă. Pentru ce valori reale ale lui k , are loc aceeași proprietate pentru rădăcinile ecuației $z^3 + az^2 + kz + a = 0$?
- 79. Să se afle o ecuație de gradul 4, astfel ca la fiecare rădăcină α să-i corespundă și rădăcina $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$.
- 80. Să se afle o condiție necesară și suficientă ce trebuie îndeplinită de coeficienții ecuației $z^4 - pz^3 + qz^2 - rz + s = 0$, pentru ca imaginile în planul complex ale rădăcinilor să formeze un paralelogram.

● 81. Pentru ca rădăcinile unui polinom $P(z)$ de grad 4 să fie vîrfurile unui paralelogram, este necesar și suficient ca derivatele $P'(z)$ și $P''(z)$ să aibă un zero dublu comun.

● 82. Să se arate că un polinom admite cel puțin atîtea rădăcini complexe ca și derivata sa.

● 83. Fiind dat un polinom $P(x)$, să se formeze polinomul $Q(x)$ care are aceleași rădăcini ca și $P(x)$, dar toate simple. Să se formeze polinomul $P_1(x)$ ale cărui rădăcini sînt rădăcinile simple ale lui $P(x)$.

● 84. Să se rezolve ecuația

$$\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^3 = \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}.$$

Să se rezolve ecuațiile

● 85. $|2x-1| + |x| - |3x+1| = 1.$

● 86. $|x| + |x-1| + |x+1| = 0.$

● 87. $\sqrt{(x-1)^2} - 2|2x-1| = 3.$

● 88. $(3x-5)^2 - (3x-5)|x+4| = 0.$

● 89. $|x^2-1| = |2x|.$

● 90. $\sqrt{|1-x^2|} = \frac{x}{2} + 1.$

● 91. $\sqrt{3x^2 - |x| - 1} = 3 - 2x.$

● 92. $\sqrt{x^2 - 5x + 5} = |2x - 7|.$

● 93. $\sqrt{(2x-1)^2} = \sqrt{(5-3x)^2}.$

● 94. $\sqrt{(2-x)^2}|3-2x| = 1.$

● 95. $3x^2 - 2x = \sqrt{8x^4 - 12x^3 + 21x^2 - 16}.$

● 96. $x^2 + 1 = 3x + \sqrt{12x^2 - 12x + 1}.$

● 97. $x^2 - x + 1 = \sqrt{-2x^3 + 6x^2 - 2x + 1}.$

● 98. $\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} = 2x.$

● 99. $2x^2 - 3x + 1 = \sqrt{-12x^3 + 30x^2 - 6x - 3}.$

- 100. $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}.$
- 101. $\frac{(x + a) \sqrt{x + b} + (x + b) \sqrt{x + a}}{\sqrt{x + b} + \sqrt{x + a}} = \sqrt{ab}.$
- 102. $\frac{x \sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = 12.$
- 103. $\sqrt[3]{a + x} - \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[6]{a^2 - x^2}.$
- 104. $\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[3]{5x}.$
- 105. $\frac{[\sqrt[3]{(a - x)^2} - \sqrt[3]{(a - x)(x - b)} + \sqrt[3]{(x - b)^2}]^2}{\sqrt[3]{a - x} + \sqrt[3]{x - b}} = a - b.$
- 106. $\sqrt[m]{(1 + x)^2} - \sqrt[m]{(1 - x)^2} = \sqrt[m]{1 - x^2}.$
- 107. $\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 34.$
- 108. $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1.$
- 109. $\sqrt{x^2 + 17} - \sqrt[4]{x^2 + 17} = 6.$
- 110. $\sqrt{x - 2 + \sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} = 7\sqrt{2}.$
- 111. $\sqrt[5]{\frac{a + x}{a}} + \sqrt[5]{\frac{a + x}{b}} = \sqrt[5]{\frac{x}{ab}}.$
- 112. $\sqrt{1 - a} \sqrt[4]{\frac{1 + x}{1 - x}} + \sqrt{1 + a} \sqrt[4]{\frac{1 - x}{1 + x}} = 2\sqrt[4]{1 - a^2}.$
- 113. $\sqrt[n]{\frac{a - x}{b + x}} + \sqrt[n]{\frac{b + x}{a - x}} = 2.$
- 114. $\frac{\sqrt[n]{a + x}}{a} + \frac{\sqrt[n]{a + x}}{x} = \frac{\sqrt[n]{x}}{b}, \quad a > b > 0.$
- 115. $\frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \lg 5 - 1 + \lg x \right) = 1 - \lg 5.$

- 116. $3 \sqrt{\lg x} + 2 \lg \sqrt{\frac{1}{x}} = 2.$
- 117. $4 - \lg x = 3 \sqrt{\lg x}.$
- 118. $\frac{\lg x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \lg 5 - 1}{\frac{1}{4} \lg (x - 1)} = \lg 0,01.$
- 119. $\lg(x - 9) + 2 \lg \sqrt{2x - 1} = 2.$
- 120. $\log_5 (x^2 - 11x + 43) = 2.$
- 121. $5 \log_2 3 + 2 \log_2 \sqrt{(x - 2) \sqrt{8}} - 1 \frac{2}{3} \log_2 27 = 1,5.$
- 122. $\log_x 2 + \log_2 x = 2,5.$
- 123. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$
- 124. $\sqrt{\log_x \sqrt{3x}} \log_3 x = -1.$
- 125. $\log_4 (x + 12) \cdot \log_x 2 = 1.$
- 126. $2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2 x} a = 0.$
- 127. $\log_a \sqrt{1 + x} + 3 \log_{a^2} (1 - x) = \log_{a^4} (1 - x^2)^2 + 2.$
- 128. $(1 + \log_c a) \cdot \log_a x \log_b c = \log_b x \log_c x \log_a c.$
- 129. $\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax}} + \log_x \sqrt[4]{ax} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a.$
- 130. ${}^{\lg x} \sqrt{x} = 10^{x^4}, (x > 0).$
- 131. $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10.$
- 132. $x^{2 \log_x 10} = 10x.$
- 133. $\lg \sqrt{75 + 5^{\sqrt[3]{x-1}}} = 1.$
- 134. $\lg (8 \sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}}) = 0.$

- 135. $x^{(2\lg^3 x - 1,5 \lg x)} = \sqrt{10}$.
- 136. $2^{\frac{3}{\lg_3 x}} = \frac{1}{64}$.
- 137. $(0,4)^{\lg^2 x + 1} - (6,25)^{2 - \lg x^3} = 0$.
- 138. $2 x^{\lg x} + 3 x^{-\lg x} = 5$.
- 139. $\lg 2 + \lg (4^{x-2} + 9) = 1 + \lg (2^{x-2} + 1)$.
- 140. $\lg 10 + \frac{1}{3} \lg (271 + 3\sqrt[3]{2x}) = 2$.
- 141. $\sqrt[3]{0,125} = 3^{2 - \lg_3 18}$.
- 142. $10^{\lg_a (x^2 - 3x + 5)} = 3^{\lg_a 10}$.
- 143. $x^{\lg_x (x-2)^2} = 9$.
- 144. $x^{\lg_{x^2} (x^2 - 1)} = 5$.
- 145. $49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$.
- 146. $9 \frac{1}{4} \cdot 4^{2x} - \frac{1}{2} \cdot 4^{4x} = 1$.
- 147. $\frac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2 \cdot 3^{\sqrt[3]{x-1}}} = 1,5$.
- 148. $4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.
- 149. $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 0$.
- 150. $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$.
- 151. $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$.
- 152. $3^{x-5} + 3^{x-7} + 3^{x-9} = 45,5 + 22,75 + 11,375 + \dots$
- 153. $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$.
- 154. $(0,5)^{x^2 - 20x + 61,5} = \frac{8}{\sqrt{2}}$

- 155. $2(2^{\sqrt{x+3}})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}} - \sqrt{x-1}\sqrt[4]{4^2} = 0$
- 156. $(x-1)a^{x(x-1)} - x^2[a^{x(x-1)} - 1] - (x-1) = 0.$
- 157. $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}.$
- 158. $\sqrt[3]{x-1}\sqrt[4]{3^{10x+5}} - \sqrt[3]{x-9}\sqrt[4]{27^{3x-7}} = 0.$

Să se determine parametrul m astfel ca rădăcinile x' , x'' ale fiecărei ecuații să verifice relația scrisă în dreptul ei.

- 159. $2x^2 + 3x - 2m + 1 = 0$, $x' + 2x'' = 3.$
- 160. $(m-25)x^2 + 20x - m + 149 = 0$, $x' = (x'')^2.$
- 161. $x^2 - (5m+8)x + m + 3 = 0$, $2x' - x'' = 3.$
- 162. Să se afle condiția ca ecuația $x^2 + px + q = 0$, să aibă două rădăcini a căror raport să fie egal cu $1+i$.
- 163. Pentru ecuația $x^3 - (m^3+2)x^2 + x - 3 = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 , se cere: 1° să se determine parametrul real m astfel ca să avem $x_1x_2x_3 = x_1 + x_2 + x_3$, 2° să se afle valorile posibile ale determinantului

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix},$$

3° Să se calculeze $\left(\frac{1+x_1}{1+x_2}\right)^3, \left(\frac{1+x_2}{1+x_3}\right)^3, \left(\frac{1+x_3}{1+x_1}\right)^3.$

- 164. Se dă ecuația $x^3 - 11x^2 + 24x + 144 \sin^2 \alpha = 0$. Să se determine valorile parametrului $\alpha \in [0, 2\pi]$, pentru care suma a două rădăcini este egală cu 5.
- 165. Să se determine parametrul λ și să se rezolve ecuația $x^3 - (\lambda+2)x^2 + (2\lambda+1)x - \lambda = 0$, știind că $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = \frac{3}{x_3}.$
- 166. Să se rezolve ecuația: $x^3 - 4x^2 - 19x - 14 = 0$, știind că o rădăcină este dublul alteia.
- 167. Să se rezolve ecuația $x^3 - 9x^2 + mx - 15 = 0$, știind că rădăcinile ei sînt în progresie aritmetică.

● 168. Fiind dată ecuația $x^3 - 21x^2 + ax - 216 = 0$, se cere să se determine parametrul a și apoi să se rezolve ecuația, știind că între rădăcinile ecuației avem relația $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$.

● 169. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $(m^2 + 1)x^3 + mx^2 + (m^2 - 1)x + m + 2\sqrt{3} = 0$. Notînd $a = \arctg x_1$; $b = \arctg x_2$; $c = \arctg x_3$, să se arate că $\arctg(a + b + c) = \sqrt{3}$.

● 170. Care este condiția ca o rădăcină a ecuației $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, să fie egală cu dublul unei alte rădăcini. Să se rezolve ecuația în acest caz.

● 171. Să se afle condiția ca rădăcinile ecuației $x^3 + mx^2 + px + q = 0$ să fie în progresie aritmetică.

● 172. Să se determine condiția ca rădăcinile ecuației $x^3 + \lambda x^2 + \mu x - \lambda^3 = 0$ să fie în progresie geometrică.

● 173. Să se determine relația între coeficienții m, n și p astfel ca rădăcinile ecuației $x^3 + mx^2 + px + q = 0$, să verifice relația $x_1 = x_2 + x_3$.

● 174. Se dă ecuația

$$x^3 + px + q = 0.$$

Să se afle condiția pentru ca rădăcinile ei x_1, x_2, x_3 să fie legate prin relația

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{x_3}.$$

● 175. Să se afle condiția ca o ecuație de gradul trei să admită o rădăcină care să fie medie geometrică a celorlalte două. Să se rezolve în acest caz.

● 176. Să se afle condiția ca rădăcinile a, b, c ale ecuației $x^3 + mx^2 + px + q = 0$, să verifice relația $\frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

● 177. Să se determine a, b, c , pentru ca ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, să aibă rădăcinile a, b, c .

● 178. Să se rezolve ecuația $x^4 - (a + b)x^3 - a(a - b)x^2 + a^2(a + b)x - a^3b = 0$, știind că rădăcinile sînt de forma $\alpha, \alpha, -\alpha, \beta$.

- 179. Se cere condiția ca două rădăcini ale ecuației $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, să fie inverse una alteia. Să se rezolve ecuația în acest caz.
- 180. Să se rezolve ecuația: $x^4 - 12x^3 + 12x^2 + 300x - 925 = 0$, știind că două rădăcini sînt opuse.
- 181. Să se determine parametrul α , astfel încît ecuația $x^4 + x^3 - 2x^2 + \alpha x - 3 = 0$, să aibă două rădăcini opuse una alteia.
- 182. Să se rezolve ecuația $6x^4 - 5x^3 - 75x^2 - 10x + 24 = 0$, știind că între rădăcinile ecuației există relația $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_3x_4} = 1$.
- 183. Să se rezolve ecuația: $4x^4 + 8x^3 - 79x^2 - 83x + 60 = 0$, știind că între rădăcinile ei există relația: $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.
- 184. Fiind dată ecuația $P(x) = x^4 - 10x^3 + ax^2 + 100x + 84 = 0$ se cere să se determine parametrul a și să se rezolve ecuația știind că între rădăcinile ecuației avem relația $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.
- 185. Să se arate că rădăcinile ecuației $x^4 - 4x^3 + 6px^2 + (8 - 12p)x + 5 = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$.
- 186. Să se afle condiția ca rădăcinile ecuației complete de gradul al 4-lea să fie legate prin relația $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$.
- 187. Să se determine parametrul λ astfel ca ecuația $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + \lambda = 0$, să aibă două rădăcini al căror produs să fie egal cu unitatea.
- 188. Să se rezolve ecuația: $x^4 + 2x^3 - 25x^2 + \alpha x + 120 = 0$, știind că $x_1x_2 = -20$.
- 189. Să se determine parametrul p din ecuația $x^4 + px^3 + 3x^2 + 5x - 4 = 0$, astfel ca produsul a două rădăcini să fie egal cu 4 și apoi să se rezolve ecuația.
- 190. Să se afle condiția ca produsul a două rădăcini ale ecuației $x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = 0$, să fie egal cu produsul celorlalte două.
- 191. Să se determine parametrul λ și să se rezolve ecuația $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - \lambda(2x^3 - 8x^2 + 12x - 6) = 0$, știind că între rădăcini există relația $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2$.

● 192. Să se determine parametrul real λ astfel ca ecuația $x^4 - 2x^2 + \lambda x + 1 = 0$, să admită o rădăcină dublă.

● 193. Să se rezolve ecuația $x^5 - 209x + 56 = 0$, știind că produsul a două rădăcini este egal cu unitatea.

● 194. Să se determine m așa ca $x^5 - 55mx + 21 = 0$, să admită două rădăcini de produs egal cu unitatea.

● 195. Să se determine parametrul real m și să se rezolve ecuația $x^5 - 9x^4 + (17 + m)x^3 - (81 + m)x^2 + 9(8 + m)x - 9m = 0$ știind că o rădăcină este egală cu $3i$, iar rădăcinile reale sînt în progresie aritmetică.

● 196. Notînd $s = a + b$ și $p = ab$ să se calculeze expresiile $a^2 + b^2$; $a^3 + b^3$; $a^4 + b^4$; $(a + b)^4 - (a^4 + b^4)$; $(a + b)^5 - (a^5 + b^5)$.

● 197. a, b, c fiind rădăcinile ecuației $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ să se calculeze funcția simetrică $E = (a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab)$.

● 198. Notînd cu a, b, c rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$, să se calculeze funcțiile simetrice

$$\Sigma a^2 b^2, \Sigma (a^2 + b^2), \Sigma a^2 bc, E^2 = (b - c)^2 (c - a)^2 (a - b)^2.$$

● 199. Notînd cu a, b, c rădăcinile ecuației $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$, să se calculeze expresia simetrică

$$E = \sum \frac{a^2 + ab + b^2}{c}.$$

● 200. Să se calculeze $\sum_{i=1}^3 x_i^6$, unde x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $x^3 + 3x^2 - x - 7 = 0$.

● 201. Pornind de la polinomul $A = \sum \frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} - 1$, unde

$$a, b, c \text{ sînt trei numere distincte, să se arate că } \sum \frac{1}{(a - b)(a - c)} = \\ = \sum \frac{b + c}{(a - b)(a - c)} = 0, \sum \frac{bc}{(a - b)(a - c)} = 1.$$

● 202. Notînd cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 + x^2 + q = 0$, să se calculeze $S = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1^2} + \frac{x_3^2 + x_1^2}{x_2^2}$.

● 203. Să se calculeze $P = (x_2^2 + x_3^2)(x_3^2 + x_1^2)(x_1^2 + x_2^2)$, x_1, x_2, x_3 fiind rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$.

● 204. Se dă ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . a) Să se calculeze $E = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$. b) Să se construiască ecuația în y cu rădăcinile $y_1 = x_2 + x_3 + 2x_1$; $y_2 = x_3 + x_1 + 2x_2$; $y_3 = x_1 + x_2 + 2x_3$.

● 205. Presupunem că trei numere variabile x, y, z sînt legate prin relația $x + y + z = 0$. Notăm $xy + yz + zx = \Sigma$ și $xyz = P$, notăm de asemenea, $x^n + y^n + z^n = S_n$. a) Să se calculeze în funcție de P și Σ sumele S_2 și S_3 ; b) Să se stabilească o formulă de recurență între S_n, S_{n-2} și S_{n-3} ; c) Folosind această formulă de recurență, să se calculeze în funcție de P și Σ sumele S_4, S_5, S_6, S_7 ; d) Să se verifice egalitățile: $2S_4 = S_2^2$; $6S_5 = 5S_2S_3$; $10S_7 = 7S_2S_5$; e) Să se determine Σ și P astfel ca $S_3 = 18$ și $S_6 = 794$. Să se calculeze x, y, z .

● 206. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Să se calculeze $P = \Pi(x_2 + x_3 + x_4)$.

● 207. Se dă ecuația $x^4 + px^3 + qx + r = 0$ cu rădăcinile a, b, c, d . Să se calculeze Σa^2bc ; Σa^3bcd .

● 208. Să se rezolve ecuația $P(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 12x + 45 = 0$, știind că admite o rădăcină dublă.

● 209. Se dă polinomul $f(x) = -\frac{1}{6}x(x-3)(x-8)$. Să se determine m astfel ca ecuația $f(x) = m$ să admită o rădăcină dublă și să se rezolve în acest caz.

● 210. Să se rezolve ecuația $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0$ știind că are rădăcini multiple.

● 211. Să se verifice că ecuația $P(x) = x^{2n} - n^2x^{n+1} + 2(n^2 - 1)x^n - n^2x^{n-1} + 1 = 0$, are rădăcina $x = 1$ multiplă de ordinul patru.

● 212. Să se rezolve ecuația $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + a = 0$, știind că admite o rădăcină dublă.

- 213. Care este condiția pentru ca ecuația $x^4 - 3x^2 + \alpha x + \beta = 0$ să aibă o rădăcină dublă?
- 214. Ce loc trebuie să descrie punctul (α, β) din plan pentru ca ecuația $x^4 - 3x^2 + \alpha x + \beta = 0$, să aibă o rădăcină dublă?
- 215. Se cere condiția pentru ca ecuația $x^4 - 4px + q = 0$ să aibă o rădăcină dublă. Să se deducă expresiile lui p și q în funcție rațională de un parametru.
- 216. Ecuația $x^4 - 3x^2 + \alpha x + \beta = 0$, poate avea o rădăcină triplă?
- 217. Să se determine m, n astfel ca $x^4 + mx^3 + 2x + n = 0$ să aibă o rădăcină triplă.
- 218. Să se afle un polinom de gradul 6, cu primul coeficient egal cu unitatea și așa ca $f(x) + i$ să aibă pe i rădăcină triplă.
- 219. Să se afle condiția ca ecuația $x^5 + mx^4 + nx^2 + p = 0$ să aibă o rădăcină triplă.
- 220. Să se găsească condițiile ca ecuația $P(x) = x^4 + px^2 + qx + r = 0$ să aibă o rădăcină triplă și în acest caz să se rezolve.
- 221. Să se determine parametrii m, n, p astfel ca ecuația $x^6 + mx^4 + 10x^3 + nx + p = 0$ să aibă o rădăcină cuadruplă.
- 222. Să se determine parametrii α, β, γ astfel ca ecuația $x^6 - 5x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, să aibă o rădăcină multiplă de ordinul patru.
- 223. Se cere condiția ca ecuația $x^4 + \alpha x^2 + \beta x + 1 = 0$ să aibă două rădăcini distincte.
- 224. Se cere condiția ca ecuația $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + px + q = 0$ să nu aibă decît două rădăcini distincte.
- 225. Se cere condiția ca ecuația $x^4 + px^3 + qx + r = 0$ să nu aibă decît două rădăcini distincte.
- 226. Să se determine parametrul m astfel ca ecuațiile $2x^4 - 11x^3 + 9x^2 + 14x - m = 0$, $2x^4 + 5x^3 - 15x^2 - 10x + 8 = 0$ să aibă trei rădăcini comune.
- 227. Să se determine a și b astfel ca ecuațiile $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x + a = 0$ și $x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x + b = 0$ să aibă două rădăcini comune.

- 228. Să se afle condițiile ca ecuațiile $ax^3 + bx + c = 0$; $cx^3 + bx^2 + a = 0$ să aibă două rădăcini comune.
- 229. Să se examineze natura rădăcinilor ecuației $4(m + 1)\cos^2 x - 8m \cos x - 5m + 7 = 0$, după valorile parametrului real m .
- 230. Să se examineze natura rădăcinilor ecuației $x^4 + 2(2\alpha - 1)x^2 + 3(\alpha^2 - 1) = 0$, după valorile parametrului real α .
- 231. Să se discute cu ajutorul șirului lui Rolle ecuația $P(x) = x^4 - 15x^2 - 27x + 12 = 0$.
- 232. Să se afle cu ajutorul șirului lui Rolle intervalele în care se găsesc rădăcinile reale ale ecuației $P(x) = 4x^4 - 16x^3 + 12x^2 + 12x - 9 = 0$.
- 233. Să se separe rădăcinile ecuației $2x^3 - 9x^2 - 60x + \alpha = 0$, unde α este un parametru real.
- 234. Să se discute cu ajutorul șirului lui Rolle rădăcinile ecuației $8x^5 - 23x^4 + 20x^3 - 46x^2 + 40x + m = 0$, când m variază de la $-\infty$ la $+\infty$.
- 235. Să se discute cu ajutorul șirului lui Rolle ecuația $3x^4 - 8\alpha x^3 - 6\alpha^2 x^2 + 24\alpha^3 x - 17\alpha^2 = 0$.
- 236. Să se studieze rădăcinile ecuației $(x - 1)^3 - \lambda x = 0$, unde λ este un parametru real.
- 237. Să se discute realitatea rădăcinilor ecuației $x^m + px + q = 0$, $m > 0$.
- 238. Să se discute, după valorile parametrului a , numărul și semnul rădăcinilor reale ale ecuației $f(x) = x^2 + \ln(1 + x^2) - 6 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + a = 0$.
- 239. Utilizând șirul lui Rolle, să se discute realitatea rădăcinilor ecuației bipătrate $f(x) \equiv x^4 + px^2 + q = 0$.
- 240. Să se discute realitatea rădăcinilor ecuației $16x^6 - 45x^3 + \lambda x - 10 = 0$, unde λ este un parametru real.
- 241. Să se discute natura și semnele rădăcinilor ecuației $x^4 - (3m + 4)x^2 + (m + 1)^2 = 0$.

● 242. Să se examineze natura rădăcinilor ecuației $3x^4 - 16ax^3 + 18a^2x^2 - 5a^2 = 0$. Să se rezolve complet ecuația în cazul când ea are o rădăcină dublă.

● 243. Să se discute rădăcinile ecuației $x^4 - 2ax^3 + 2a^3x + m^4 - a^4 = 0$, a și m fiind numere pozitive. Să se arate că ecuația are cel mult două rădăcini reale, care sînt cuprinse în $(-a, a)$.

Aplicație. Să se înscrie într-o elipsă un triunghi de suprafață dată $\frac{b}{a} m^2$. Baza triunghiului este paralelă cu axa mică a elipsei, iar

vîrfurile lui este situat în una din extremitățile axei mari (a, b sînt lungimile semiaxelor elipsei).

● 244. Să se discute, cu ajutorul șirului lui Rolle natura rădăcinilor ecuației $f(x) = x^3 - 3x + a^2 + b^2 - 3 = 0$.

● 245. Cîte rădăcini cuprinse între 0 și $\sqrt{2}$, are ecuația $f(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$?

● 246. Utilizînd șirul lui Sturm, să se afle numărul rădăcinilor reale ale ecuației $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 7 = 0$.

● 247. Utilizînd șirul lui Sturm, să se separe rădăcinile reale ale ecuației $x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2 = 0$.

● 248. Să se studieze ecuația $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 0$.

● 249. Să se discute natura rădăcinilor ecuației $x^5 + ax - 1 = 0$.

● 250. Să se discute realitatea rădăcinilor ecuației $\lambda \sin 2x - \sin x - \cos x + 1 = 0$.

● 251. Să se discute ecuația în x : $(1 - \cos x) \operatorname{tg} \alpha - x + \sin x = 0$.

● 252. Să se discute ecuația $2x - 2 \sin x + 2 \cos x - 1 = 0$.

● 253. Să se discute ecuația $(x - \sin x) - (\alpha - \sin \alpha) - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} (\cos \alpha - \cos x) = 0$.

● 254. Să se discute pe cale grafică, după valorile parametrului real m , numărul rădăcinilor reale ale ecuației $x^2 - 3x + m - 2 = 0$, cuprinse între -1 și $+2$.

● 255. Să se examineze natura rădăcinilor ecuației $x^4 - 4x^2 + 4\lambda x - 1 = 0$, după valorile parametrului real λ .

- 256. Să se examineze natura rădăcinilor ecuației $\lambda x^5 - 9x^4 + 24x^2 - 16 = 0$, după valorile parametrului λ .
- 257. Să se construiască un polinom $P(x)$, de gradul trei, astfel ca $P(0) = 0$, $P(1) = 5$, $P(2) = 10$, $P(3) = 18$. Să se calculeze cu trei zecimale exacte rădăcina pozitivă a ecuației $P(x) = 14$.
- 258. Să se determine parametrii reali a și b , astfel ca ecuația $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + ax + b = 0$ să admită rădăcina $1 + i$. Cu valorile găsite să se studieze natura rădăcinilor ecuației derivate, determinând intervale de lungime 0,001, în care se găsesc rădăcinile reale.

Să se rezolve inecuațiile

- 259. $(x + 3)(4x^2 + 3x + 3) < (x^2 + 6x + 9)(x^2 + 1)$.
- 260. $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 2x^2 - 3} \leq 0$.
- 261. $\frac{4}{3} < \frac{x^2 - 2mx + m^2}{x^2 - 6x - 7}$.
- 262. $(x^2 - 3x + 1)^2 < (x - 2)^2$.
- 263. $\frac{x + 1}{x^2 + 2x - 3} - \frac{x}{x^2 - 3x + 2} > 0$.
- 264. Notînd cu x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $mx^2 - (m - 2)(m^2 + 1)x + m(m - 2)^2 = 0$, unde x_2 este o fracție rațională de m , să se afle valorile lui m , pentru care: 1° $x_1 > x_2$ și 2° $-2 < x_1$.
- (265) Să se determine valorile reale ale parametrului m pentru care

$$\frac{1 + x_1}{1 - x_2} + \frac{1 + x_2}{1 - x_1} \geq 8,$$

unde x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $(m - 1)x^2 - 2mx + 3 = 0$.

- 266. Pentru ecuația $(K - 15)x^2 - 4Kx + K - 6 = 0$, se cere
1° Să se discute natura și semnul rădăcinilor cînd K variază de la $-\infty$ la $+\infty$.
2° Să se găsească mulțimea valorilor lui K astfel ca să avem $x_1 < 2 < x_2$.
3° Să se determine valorile lui K pentru care se verifică inegalitatea

$$x_1^2 + x_2^2 \geq -\frac{1}{10}.$$

- 267. Fiind dată ecuația: $x^2 + mx + 1 = 0$, să se determine m astfel ca să avem:

$$\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{x_2^2}{x_1^2} > 1.$$

- 268. Se dă ecuația

$$(2m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0$$

unde $m \in \mathbf{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Se cere: 1° Valorile lui m pentru care ecuația are rădăcini reale, 2° Valorile lui m pentru care este verificată relația $x_1^3 + x_2^3 < x_1x_2^3 + x_1^3x_2$, unde x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuației date.

Să se rezolve inecuațiile

● 269. $\left| \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9x + 20} \right| \leq 10.$

● 270. $|x^2 - 1| > |2x|.$

● 271. $\sqrt{1 - x^2} \geq 2x + 1.$

● 272. $2 - 3x + \sqrt{4 + 4x - 3x^2} > 0.$

● 273. $4x + 5 < \sqrt{x^2 + 3x + 2}.$

● 274. $\sqrt{x^2 + x + 1} > 2x - 3.$

● 275. $\sqrt{3x^2 - 8x + 5} \geq -2x + 2.$

● 276. $\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} > \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}.$

● 277. $\sqrt{x + 4} + \sqrt{2x + 7} < 2.$

● 278. $\sqrt{x - 8} < \sqrt{x - 2} - 1.$

- 279. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} > \sqrt{1+4x}$.
- 280. $\log_a x > \log_a (3x-2)$.
- 281. Să se afle valorile x și m pentru care avem $x^2 + 2(m+1)x + 2(m^2 + m + 1) > 0$.
- 282. Să se afle valorile x și m , pentru care avem $m(x^2 - 2x + 4) > 4x - 3$.

Cap. V. Determinanți

Să se calculeze determinanții

- 1.
$$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$$
- 2.
$$\begin{vmatrix} x+y & x-y & 2x \\ x-y & 2x & x+y \\ 2x & x+y & x-y \end{vmatrix}$$
- 3.
$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 - (b-c)^2 & b^2 - (c-a)^2 & c^2 - (a-b)^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$$
- 4.
$$\begin{vmatrix} 2xy & y^2+xz & x^2+yz \\ y^2+xz & 2yz & z^2+xy \\ x^2+yz & z^2+xy & 2xz \end{vmatrix}$$
- 5.
$$\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ x^2+y^2 & y^2+z^2 & z^2+x^2 \\ x^3+y^3 & y^3+z^3 & z^3+x^3 \end{vmatrix}$$
- 6.
$$\begin{vmatrix} a+b & ab-1 & 1+a^2+b^2+a^2b^2 \\ b+c & bc-1 & 1+b^2+c^2+b^2c^2 \\ c+a & ca-1 & 1+c^2+a^2+a^2c^2 \end{vmatrix}$$
- 7.
$$\begin{vmatrix} (2a+x)^3 & (2b+x)^3 & (2c+x)^3 \\ (a+x)^3 & (b+x)^3 & (c+x)^3 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$
- 8.
$$\begin{vmatrix} \cos \frac{a-b}{2} & \cos \frac{b-c}{2} & \cos \frac{c-a}{2} \\ \cos \frac{a+b}{2} & \cos \frac{b+c}{2} & \cos \frac{c+a}{2} \\ \sin \frac{a+b}{2} & \sin \frac{b+c}{2} & \sin \frac{c+a}{2} \end{vmatrix}$$
- 9.
$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

● 10. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$ ● 11. $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+2a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+3a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+4a \end{vmatrix}$

● 12. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4a & 3a+b & 2a+2b & a+3b & 4b \\ 6a^2 & 3a^2+3ab & a^2+4ab+b^2 & 3b^2+3ab & 6b^2 \\ 4a^3 & a^3+3a^2b & 2a^2b+2ab^2 & b^3+3ab^2 & 4b^3 \\ a^4 & a^3b & a^2b^2 & ab^3 & b^4 \end{vmatrix}$

● 13. Să se arate că suma de mai jos este un pătrat perfect

$$S = a \begin{vmatrix} a & d & e \\ b & 0 & f \\ c & -f & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 & e \\ b & d & f \\ c & e & d \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & 0 & -d \\ b & d & 0 \\ c & e & f \end{vmatrix}$$

● 14. Să se arate că determinantul

$$D(\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta + \alpha) & \cos(\theta + \beta) & \cos(\theta + \gamma) \\ \sin(\theta + \alpha) & \sin(\theta + \beta) & \sin(\theta + \gamma) \\ \sin(\beta - \gamma) & \sin(\gamma - \alpha) & \sin(\alpha - \beta) \end{vmatrix}$$

este independent de θ . Să se afle valoarea lui.

● 15. Să se calculeze determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4m_a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 4m_b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & 4m_c^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

a, b, c, m_a, m_b, m_c fiind lungimile laturilor și medianelor unui triunghi. Care este semnificația geometrică a valorii acestui determinant?

● 16. Să se arate că

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$$

este divizibil cu $(x-1)^3$.

● 17. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ \cos n\theta & \cos(n+1)\theta & \cos(n+3)\theta \\ \sin n\theta & \sin(n+1)\theta & \sin(n+3)\theta \end{vmatrix}$$

este divizibil cu $1 - 2x \cos \theta + x^2$.

- 18. Să se arate că determinantul

$$D = \begin{vmatrix} ab & ab' + ba' & a'b' \\ bc & bc' + cb' & b'c' \\ ca & ca' + ac' & a'c' \end{vmatrix}$$

este divizibil cu

$$d = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Să se calculeze determinanții de ordinul n

● 19.
$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & x & x & \dots & x \\ x & -1 & x & \dots & x \\ x & x & -1 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

● 20.
$$D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}$$

● 21.
$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

● 22.
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-2} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

- 23. Să se arate că determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 & x_1 - y_3 & \dots & x_1 - y_n \\ x_2 - y_1 & x_2 - y_2 & x_2 - y_3 & \dots & x_2 - y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - y_1 & x_n - y_2 & x_n - y_3 & \dots & x_n - y_n \end{vmatrix}$$

este nul, dacă $n > 2$.

● 24. Notînd

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

să se stabilească o relație de recurență între Δ_n , Δ_{n-1} și Δ_{n-2} . Să se calculeze primele patru polinoame Δ_n .

● 25. Fiind dat determinantul

$$\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 + a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 + a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 + a_n \end{vmatrix}$$

să se stabilească relația de recurență $\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \Delta_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n) + a_2 a_3 \dots a_n$, și apoi să se stabilească

că formula $\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^n a_i + \sum_{k=1}^n a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_{k+1} \dots a_n$,

sau $\Delta_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$.

● 26. Să se descompună în factori determinantul

$$D(x, a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}.$$

● 27. Câți termeni diferiți de zero are un determinant de ordinul n , în care două elemente sînt nule?

- 28. Calculînd pe două căi determinantul

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

să se stabilească identitatea

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$$

- 29. Să se arate că dacă $ab + bc + ca = 1$ atunci

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{1+a^2} & a \\ 1 & \frac{1}{1+b^2} & b \\ 1 & \frac{1}{1+c^2} & c \end{vmatrix} = 0.$$

- 30. Notînd cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$ și

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix},$$

să se arate că $\Delta^2 = -4p^3 - 27q^2$. Să se deducă de aici condiția ca ecuația dată să aibă toate rădăcinile reale.

Să se rezolve ecuațiile

● 31. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i + x \end{vmatrix} = 0.$ ● 32. $\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x(x+2) & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2^8$

● 33. $D(x) = \begin{vmatrix} e^{2x^2} & e^{-a} & e^{-x} \\ e^{-a} & e^{2x} & e^{-x^2} \\ e^{-x} & e^{-x^2} & e^{2a} \end{vmatrix} = 0.$

$$\bullet \text{ 34. } D_n = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & -x & \dots & 0 & a_{n-1} \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -x & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & -x + a_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cap. VI. Matrice

- 1. Completăm căsuțele unui tablou pătratic cu n linii și n coloane în modul următor: pe prima linie, numerele întregi de la 1 la n apoi fiecare număr este egal cu cel de deasupra sa, adunat cu 1.

1	2	3		n
2	3	4		$n+1$
3	4	5		$n+2$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
n	$n+1$	$n+2$		

- a) Care este ultimul număr scris?
 b) Să se calculeze în funcție de n suma numerelor scrise pe fiecare linie a tabloului.
 c) Care este suma tuturor numerelor tabloului?
 d) Notăm cu I_1 suma termenilor situați pe diagonală ce coboară de la stînga la dreapta, prin I_2 suma termenilor

situați pe paralela la această diagonală care începe cu 2, cu I_3 suma termenilor de pe paralela la această diagonală care începe cu 3 ș.a.m.d. pînă la I_n . Să se calculeze $I_1; I_2; \dots; I_n$ și apoi suma $S = I_1 + I_2 + \dots + I_n$.

- 2. Numerele 1—200 sînt așezate, într-o ordine oarecare, într-un tablou de 20 linii și de 10 coloane. Se ia din fiecare linie numărul cel mai mare: fie X cel mai mic dintre aceste 20 numere. Din fiecare coloană se ia numărul cel mai mic, fie Y cel mai mare dintre aceste 10 numere. Să se compare X și Y .

- 3. Să se arate că orice matrice de ordinul doi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, satisface ecuația $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$.

- 4. Fiind date matricele

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

unde $i = \sqrt{-1}$, să se arate că avem $A_p A_q + A_q A_p = 2I \delta_{pq}$ unde $p, q = 1, 2, 3, 4$ și unde δ_{pq} este simbolul lui Kronecker, deci el este egal cu zero dacă $p \neq q$ și egal cu unitatea, în caz contrar.

● 5. Fie $D = [a_{ij}]$, o matrice pătrată cu elemente complexe. Notînd $\bar{D} = [\bar{a}_{ij}]$, unde $\bar{a}_{ij}$ este numărul complex conjugat al lui a_{ij} , să se arate că dacă $D\bar{D}^t = [0]$, atunci $D = [0]$. ● 6. A și B sînt matrice de ordinul n . Să se arate că AB este simetrică dacă și numai dacă produsul dintre A și B este comutativ. ● 7. Să se determine matricele A de ordinul doi, așa ca $AA^t + A^t A = 2I$. ● 8. Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & \delta \end{bmatrix}$. Să se studieze comutativitatea lor și să se calculeze $(A + B)^2$, $(A + B)^3$. ● 9. Să se determine matricele M și M' așa ca

$$M' \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

● 10. Dacă

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{tg} t \\ \operatorname{tg} t & 0 \end{bmatrix}$$

să se arate că avem

$$I + A = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} (I - A).$$

● 11. Să se afle matricea $X = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$, știind că avem $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

● 12. 1° Să se afle matricele de ordinul doi, care ridicate la pătrat dau matricea unitate. 2° Să se arate că matricele

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

îndeplinesc condiția precedentă. 3° Să se arate că oricare ar fi numerele λ, μ și ν avem $(\lambda A + \mu B + \nu C)^2 = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) I$. ● 13. Să se afle toate matricele M de ordinul doi, așa ca să avem $M^2 = M$. În particular să se arate că matricele

$$\mathbf{M}(u) = \begin{bmatrix} \cos^2 \frac{u}{2} & \cos \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} \\ \cos \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} & \sin^2 \frac{u}{2} \end{bmatrix}$$

satisfac condiția precedentă. Să se calculeze $\mathbf{M}(u) \mathbf{M}'(u)$, unde $\mathbf{M}'$ este derivata matricei $\mathbf{M}$. ● 14. Să se afle toate matricele de dimensiuni $2/2$, care ridicate la pătrat să dea matricea nulă. ● 15. Fie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

o matrice nesară și A_{ik} complementul algebric al elementului a_{ik} . Să se efectueze produsul

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \dots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \dots & \mathbf{A}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_{n-1,1} & \mathbf{A}_{n-1,2} & \dots & \mathbf{A}_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Să se deducă de aici expresia minorilor determinantului adjunct al matricei $\mathbf{A}$. ● 16. Să se calculeze

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^n.$$

● 17. Dacă

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

să se calculeze $\mathbf{B}^n$. ● 18. Fiind dată matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

să se calculeze A^n . ● 19. Fie U o matrice pătrată p/p în care toate elementele sînt egale cu 1. Să se calculeze U^n , pentru n număr natural.

● 20. Să se afle toate matricele permutabile cu matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

● 21. Fiind dată o matrice pătrată $A = [a_{ij}]$ cu coeficienți complecși ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$), se numește urmă a matricei A : $\text{tr } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$. Utilizînd această noțiune, să se arate că este imposibil de a găsi matrice X și Y de ordinul n , cu coeficienți complecși, așa ca

$$XY - YX = I_n,$$

unde I_n este matricea unitate de ordin n . ● 22. Dîndu-se matricele.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

să se arate că matricele

$$\pm I, \pm A, \pm B, \pm C,$$

formează un grup față de operația de înmulțire a matricelor. ● 23. Să se găsească toate matricele X , de tipul $2/2$, așa ca să avem

$$X^2 - 4X + 3I = 0.$$

● 24. Să se arate că matricea

$$M = \begin{bmatrix} \sin 2\theta & \sin 3\theta & \sin 4\theta \\ \sin 3\theta & \sin 4\theta & \sin 5\theta \\ \sin 4\theta & \sin 5\theta & \sin 6\theta \end{bmatrix}$$

este singulară. Să se arate apoi că forma pătratică (polinom omogen de gradul doi)

$$[x \ y \ z] M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \varphi(x, y, z)$$

este degenerată, deci că ea este produsul a două forme liniare, ce trebuiesc determinate.

- 25. Să se afle rangul următoarelor matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 26. 1° Dacă pentru elementele a_{ij} ale unei matrice A avem $a_{ij} = r_i s_j$, să se arate că rangul matricei A este unu sau zero. 2° Dacă matricea $A = [a_{ij}]$ este de rang unu, să se arate că $a_{ij} = r_i s_j$ pentru orice i și j . ● 27. A și B fiind matrice de dimensiuni p/q de ranguri respectiv r și s , să se compare cu $r + s$ rangurile matricelor

$$M_1 = \begin{bmatrix} A & : & 0 \\ \cdot & \cdot & : & \cdot \\ 0 & : & B \end{bmatrix}, M_2 = [A : B].$$

- 28. Să se afle matricele inverse ale următoarelor matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 29. Să se calculeze inversa matricei de ordinul n

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

● 30. Să se determine matricea **B** astfel ca **A** = **BC** unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ și } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

● 31. Să se afle matricea **B**, așa ca **A** = **BC**, în următoarele cazuri

$$1^\circ 2^\circ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$3^\circ 4^\circ \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

● 32. Fie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ și } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Să se afle **C**, așa ca **A** = **BC**. ● 33. Cu coeficienții polinomului $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, unde $a_0 a_n \neq 0$, formăm matricele coloană

$$\mathbf{P} = [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ a_0]^t, \quad \mathbf{P}' = [0 \ na_n \ \dots \ 2a_2 \ a_1]^t.$$

Se cere să se examineze dacă se poate construi o matrice nesingulară **B**, cu cât mai multe elemente nule, astfel încît **P'** = **BP**. Pentru $n = 2$ să se calculeze **B**² și **B**³, precum și valoarea determinanților corespunzători. ● 34. Se consideră matricele

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ z & x-z & y-z \\ 2y & -2 & z \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} z-x & -3 & y-z \\ 1 & z & 1 \\ y-x & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

în care (x, y, z) este o soluție a sistemului

$$\begin{cases} 11^{xz} + 2 \cdot 5^y = 171 \\ 11^z + 2 \cdot 5^{\frac{y}{2}} = 21 \\ 11^{(x-1)z} + 5^{\frac{y}{2}} = 16 \end{cases}$$

Se cere să se afle det **M**, unde **M** = **AB**.

Cap. VII. Sisteme de ecuații

Să se rezolve sistemele de ecuații

- 1. $\begin{cases} |x + y| = 4; \\ 2x - y = 5 \end{cases}$
- 2. $\begin{cases} (a^2 - b^2)(5x + 3y) = 2ab(4a - b), \\ a^2y - \frac{ab^2c}{a + b} + (a + b + c)bx = b^2y + ab(a + 2b) \end{cases}$
- 3. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7 \\ 3x + 2y - 5z = 8 \\ 5x - y - z = 15 \end{cases}$
- 4. $\begin{cases} 1,2345x + 1,3579y + 8,642z = 9,765744; \\ 7,447x + 5,225y - 6,336z = 0,611327; \\ 1,5380x + 4,4444y - 5,6789z = -1,20011. \end{cases}$
- 5. $\begin{cases} x + y = 2a \\ x - y = 2b \\ 2x + 3y = a + 2b \\ 3x + 4y = 2a + 3b - 1 \end{cases}$
- 6. $\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 3y - 3z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \end{cases}$
- 7. $\begin{cases} \frac{x_1}{a_1 + \lambda_1} + \frac{x_2}{a_2 + \lambda_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n + \lambda_1} = 1 \\ \frac{x_1}{a_1 + \lambda_2} + \frac{x_2}{a_2 + \lambda_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n + \lambda_2} = 1 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{x_1}{a_1 + \lambda_n} + \frac{x_2}{a_2 + \lambda_n} + \dots + \frac{x_n}{a_n + \lambda_n} = 1 \end{cases}$
- 8. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 2 \\ \alpha^2 x + \beta^2 y + \gamma^2 z = 3 \end{cases}$

α, β, γ sînt rădăcinile ecuației $t^3 - t + 1 = 0$.

$$\bullet 9. \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ 2x + y + z + 2t = 0 \\ x + 2y + 2z + t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

$$\bullet 10. \begin{cases} 2x + y - z + t = 0 \\ x + 2y + 3z - 5t = 0 \\ -x - y + z - 2t = 0. \end{cases}$$

$$\bullet 11. \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ 3x + 3y - z = 4a \\ (2 - a)x + 2y - 2z = -2a. \end{cases}$$

$$\bullet 12. \begin{cases} x - y \cos C - z \cos B = 0 \\ -x \cos C + y - z \cos A = 0 \\ -x \cos B - y \cos A + z = 0 \end{cases}$$

unde $A + B + C = \pi$.

$$\bullet 13. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

$$\bullet 14. \begin{cases} x + ay + a^2z = -a^3 \\ x + by + b^2z = -b^3 \\ x + cy + c^2z = -c^3 \end{cases} \quad \bullet 15. \begin{cases} x + ay - a^2z = a^4 \\ x + by - b^2z = b^4 \\ x + cy - c^2z = c^4 \end{cases}$$

$$\bullet 16. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ (b + c)x + (c + a)y + (a + b)z = 0 \\ bcx + cay + abz = 1 \end{cases}$$

$$\bullet 17. \begin{cases} x + a(b - c)y + a^2(b - c)z = 1 \\ x + b(c - a)y + b^2(c - a)z = 1 \\ x + c(a - b)y + c^2(a - b)z = 1 \end{cases}$$

$$\bullet 18. \begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} = \frac{1}{a + b + c} \end{cases}$$

$$\bullet 19. \begin{cases} 2x + y \operatorname{ch} a + z \operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch} 3a \\ x \operatorname{ch} a + y \operatorname{ch} 2a + z \operatorname{ch} 3a = \operatorname{ch} 4a \\ x \operatorname{ch} 2a + y \operatorname{ch} 3a + z \operatorname{ch} 4a = \operatorname{ch} 5a \end{cases}$$

$$\bullet 20. \begin{cases} x - 3y + z - 2t - u = a \\ y - z - t + u = b \\ z - t = c \\ t - u = d \\ z - \lambda u = e \end{cases} \quad \bullet 21. \begin{cases} \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 15 \\ x_1 = 8x_4 \end{cases}$$

$$\bullet 22. \begin{cases} \frac{x+y+1}{x+y-1} + \frac{y+z+2}{y+z-3} - \frac{z+x+3}{z+x-2} = \frac{3}{2}; \\ \frac{1}{x+y-1} + \frac{1}{y+z-3} - \frac{2}{z+x-2} = 0; \\ \frac{1}{x+y-1} - \frac{2}{y+z-3} + \frac{1}{z+x-2} = 0. \end{cases}$$

$$\bullet 23. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10; \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2} = 76. \end{cases}$$

$$\bullet 24. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{5}{12}; \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} - \frac{4}{z} = \frac{5}{6}; \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} - \frac{2}{z} = \frac{11}{4}. \end{cases}$$

$$\bullet 25. \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = a \\ \frac{xz}{x+z} = b \\ \frac{yz}{y+z} = c \end{cases} \quad \bullet 26. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{m}{y} - \frac{1}{z} = \frac{m^2+1}{m^2-1} \\ \frac{m-1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{m^2+m+1}{m(m+1)} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{m+1}{z} = \frac{m^2-m+1}{m(m-1)} \end{cases}$$

$$\bullet 27. \frac{x}{y+z} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-1} = x+y+z.$$

● 28.
$$\begin{cases} xy + yz + zx = 0; \\ \frac{b+c}{x} + \frac{c+a}{y} + \frac{a+b}{z} = 0; \\ \frac{bc}{x} + \frac{ca}{y} + \frac{ab}{z} = 1. \end{cases}$$

● 29. Se dă sistemul

$$\begin{cases} 2(m+2)x - (m+1)y = m \\ m^2(x-y) = 4x - y \end{cases}$$

unde m este un parametru real. Se cere: a) Să se rezolve sistemul; b) Pentru ce valori ale lui m produsul xy este un număr negativ; c) Pentru ce valori ale lui m , cel puțin una dintre x sau y este număr întreg? ● 30. Se dă sistemul

$$\begin{cases} 9(a+1)x - (a-2)y = 2a+3 \\ 4(a-2)x - (a+1)y = b \end{cases}$$

unde x și y sînt necunoscutele, iar a și b doi parametri. 1° Pentru ce valori ale lui a sistemul are o singură soluție? 2° Pentru ce perechi de valori ale lui a și b este sistemul nedeterminat? 3° Să se rezolve și să se discute în funcție de a , dacă $b = \frac{3a-1}{3}$.

Să se examineze numărul soluțiilor sistemelor de mai jos, după valorile pe care le pot lua parametrii:

● 31.
$$\begin{cases} mx + 4y = 3m - 2 \\ x + my = m^2 - 2 \end{cases}$$
 ● 32.
$$\begin{cases} 3(m-1)x + 4(m-2)y = 24 \\ 2x - y = \frac{5m-13}{(m-1)(m-2)} \end{cases}$$

● 33.
$$\begin{cases} Kx + (K+1)y = 2K-1 \\ (3-K)x + 2(3-K)y = K+1 \end{cases}$$

● 34.
$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$
 ● 35.
$$\begin{cases} \lambda x + y + z = a \\ x + \lambda y + z = b \\ x + y + \lambda z = c \end{cases}$$

● 36.
$$\begin{cases} y + z + mt = a \\ z + t + mx = b \\ t + x + my = c \\ x + y + mz = d \end{cases}$$
 ● 37.
$$\begin{cases} mx + y + z + t = a \\ x + my + z + t = b \\ x + y + mz + t = c \\ x + y + z + mt = d \end{cases}$$

$$\bullet 38. \begin{cases} mx + y - z = 0 \\ x + (m+1)y + z = 2 + m - m^2 \\ x - 2y - mz = -2 + 3m - m^2 \end{cases} \quad \bullet 39. \begin{cases} x + \lambda y + z = 0 \\ 3x - y + \lambda z = 0 \\ 4x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\bullet 40. \begin{cases} x + \alpha y + \alpha^2 z = 0 \\ \bar{\alpha}x + y + \alpha z = 0 \\ \bar{\alpha}^2 x + \bar{\alpha}y + z = 0, \end{cases} \quad \text{unde } \bar{\alpha} \text{ este conjugatul lui } \alpha.$$

$$\bullet 41. \begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + y + 4\alpha = 0 \\ (\alpha+1)x + (2\alpha-1)y + \beta = 0 \end{cases} \quad \bullet 42. \begin{cases} (a+b)x + by + az = 0 \\ bx + (a+b)y + az = 0 \\ ax + by + (a+b)z = 0 \end{cases}$$

$$\bullet 43. \begin{cases} \alpha x + 2y + 2z = 0 \\ \beta x + \alpha y + \beta^2 z = 0 \\ x + \alpha y + \alpha z = 0 \end{cases} \quad \bullet 44. \begin{cases} \alpha x + 2y + 2z = 0 \\ \beta x + \alpha y + z = 0 \\ x + \alpha y + z = 0 \end{cases}$$

$$\bullet 45. \begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + by + z = 3 \\ x + 2by + z = 4 \end{cases} \quad \bullet 46. \begin{cases} ax + by + cz = b + c \\ bx + cy + az = c + a \\ cx + ay + bz = a + b, \end{cases}$$

a, b, c , reali.

Să se rezolve sistemele:

$$\bullet 47. \begin{cases} x + y - 2z = -3 \\ 2x + 3y - 5z = -7 \\ 2xz - y^2 + 1 = 0. \end{cases} \quad \bullet 48. \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \\ x^2 - yz + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet 49. \begin{cases} 2xy + x = 1 \\ x^2 - xy + 2x = 3 \end{cases} \quad \bullet 50. \begin{cases} 10(3x^2 - x) - (5y^2 - y) = 14 \\ 3x^2 - x - (5y^2 - y) + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet 51. \begin{cases} x + y + z = 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61 \\ 2yz = x(y + z) \end{cases} \quad \bullet 52. \begin{cases} x(y + z) = 2p \\ y(z + x) = 2q \\ z(x + y) = 2r \end{cases}$$

$$\bullet 53. \begin{cases} x^3 - y^3 = 4a^3 \\ xy = a(x - y) \end{cases} \quad \bullet 54. \begin{cases} x^3 - y^3 = 602 \\ xy^2 - x^2y = -198 \end{cases}$$

$$\bullet 55. \begin{cases} x + y = 3z \\ x^2 + y^2 = 5z \\ x^3 + y^3 = 9z \end{cases} \quad \bullet 56. \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 10 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

$$\bullet 57. \begin{cases} 4x^2 + (4 + y)x^2y = (8 + 4y)xy^2 + 12y^4; \\ 4y^2 - xy = x. \end{cases}$$

$$\bullet 58. \begin{cases} \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y} = a, \\ \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y} = b \end{cases}$$

$$\bullet 59. \begin{cases} a^n x^m + b^m y^n = 2\sqrt{a^m b^n x^m y^n} \\ xy = ab \end{cases}$$

$$\bullet 60. \begin{cases} (x + y)(xy + 1) = 18xy; \\ (x^2 + y^2)(x^2 y^2 + 1) = 208x^2 y^2 \end{cases}$$

$$\bullet 61. \begin{cases} x(x + y + z) = a \\ y(x + y + z) = b \\ z(x + y + z) = c, \quad (a + b + c \neq 0) \end{cases}$$

$$\bullet 62. \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = ax = by = cz, \quad (a + b + c \neq 0). \right.$$

$$\bullet 63. \begin{cases} (x + y)(x + z) = a^2 \\ (y + z)(y + x) = b^2 \\ (z + x)(z + y) = c^2 \end{cases}$$

$$\bullet 64. \begin{cases} (x + y)^4 + 4(x + y)^2 = 117 \\ x - y = 25 \end{cases}$$

$$\bullet 65. \begin{cases} y - x = z - y \\ z^2 = xy \\ xyz = 125 \end{cases}$$

$$\bullet 66. \begin{cases} xy^2 z^3 = 4725 \\ \frac{yz^2}{x} = 6\frac{3}{7} \\ \frac{z}{x^2 y} = \frac{3}{245} \end{cases}$$

• 67. Se dă sistemul

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x^2 + y^2 - z^2 = 3 \\ x(x - y + 1) + z = m + 1 \end{cases}$$

a) Să se rezolve sistemul. b) Să se determine m astfel ca soluția sistemului dat (x, y, z) să fie formată din trei numere în progresie aritmetică. c) Să se afle valorile lui m pentru care soluția sistemului dat este formată din trei numere (x, y, z) în progresie geometrică.

● 68. Să se arate că sistemul $x - y = a$, $(x + y)(x^3 - y^3) = b$ nu are decât o singură soluție reală (a, b reali). Aplicație: $a = 2$, $b = 16$.

● 69. Să se afle în ce condiții sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x + iy)^n + (x - iy)^n = 2a, \end{cases}$$

unde a este număr real, are toate rădăcinile reale?

Să se rezolve sistemele:

● 70.
$$\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$$

● 71.
$$\begin{cases} x + xy + y = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}$$

● 72.
$$\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -11 \\ (x^2 - y^2)xy = 180 \end{cases}$$

● 73.
$$\begin{cases} xy^2 + yx^2 = 6 \\ x^2y^5 + x^5y^2 = 36 \end{cases}$$

● 74.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 39(x^4 + y^4) + 41xy(x^3 + y^3) = 0 \end{cases}$$

● 75.
$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12 \\ x + xy + y = 0 \end{cases}$$

● 76.
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y) \\ x^3 + y^3 = 7(x + y) \end{cases}$$

● 77.
$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{xy} + x^2 + y^2 = \frac{40}{3} \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} + xy = \frac{33}{10} \end{cases}$$

● 78.
$$\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{9} \\ xyz = 1 \end{cases}$$

● 79.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \\ (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = a^2 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

● 80.
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$$

● 81.
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 50 \\ x^5 + y^5 + z^5 = -50. \end{cases}$$

● 82.
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} = \frac{5}{6} \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 15 \\ x + y + z + u = 5 \\ \frac{x}{yzu} + \frac{y}{zux} + \frac{z}{uxy} + \frac{u}{xyz} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

● 83.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 13 \\ x^4y^2 + x^2y^4 = 468 \end{cases}$$

● 84.
$$\begin{cases} 3(x^3 + y^3) - 13(x^2 + y^2) + 31(x + y) - 55 = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

● 85. Să se examineze natura soluțiilor sistemului

$$\begin{cases} mx + (m - 1)y + 1 = 0; \\ y^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$$

după valorile parametrului real m .

● 86. Să se determine valorile lui m astfel ca sistemul

$$\begin{cases} x + my - 2m = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

să aibă soluțiile numere pozitive.

● 87. Să se rezolve și să se discute sistemul

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10a^2 - 18}{9 - 3a^2} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = \frac{4a^2}{9(3 - a^2)^2} \end{cases}$$

după valorile parametrului real a .

● 88. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} y = (x - 6)^2; \\ x = (y - 6)^2 \end{cases}$$

Să se rezolve sistemele

$$\bullet 89. \begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{5x}} + \sqrt{\frac{5x}{x+y}} = \frac{34}{15} \\ x+y+xy=29 \end{cases}$$

$$\bullet 90. \begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = 2 \\ x+y=12 \end{cases}$$

$$\bullet 91. \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ xy = 27 \end{cases}$$

$$\bullet 92. \begin{cases} x = \sqrt[3]{xyz} + \frac{7}{3} \sqrt[6]{xyz} \\ y = \sqrt[3]{xyz} + \frac{7}{5} \sqrt[6]{xyz} \\ z = \sqrt[3]{xyz} - \frac{7}{8} \sqrt[6]{xyz} \end{cases} \quad x, y, z > 0$$

$$\bullet 93. \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{\sqrt{xy}} + 1; \quad \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78.$$

$$\bullet 94. \begin{cases} \lg x - \lg y = 7 \\ \lg x + \lg y = 5 \end{cases}$$

$$\bullet 95. \begin{cases} \lg x + \lg y = a \\ 2 \lg x - 2 \lg y = b \end{cases}$$

$$\bullet 96. \begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\bullet 97. \begin{cases} \frac{\lg(x-y) - 2 \lg 2}{1 - \lg(x+y)} = 1 \\ \frac{\lg x - \lg 3}{\lg y - \lg 7} = -1 \end{cases}$$

$$\bullet 98. \begin{cases} \lg xy = 2 \lg a + 2 \lg b + \lg \left(2 + \frac{3a}{b}\right) \\ \lg x - \lg y = 2 \lg a + 3 \lg b - \lg(2a + 3b) \end{cases}$$

- 99.
$$\begin{cases} \frac{1}{4} \lg x + \frac{1}{6} \lg y = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \lg 5 \\ 3 \lg x - 2 \lg y = 3 - 2 \lg 5 \end{cases}$$
- 100.
$$\begin{cases} xy = a^2 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = \frac{5}{2} \lg^2 a \end{cases}$$
- 101.
$$\begin{cases} (ax)^{\lg a} = (by)^{\lg b} \\ b^{\lg x} = a^{\lg y} \end{cases}$$
- 102.
$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \quad x, y > 0 \end{cases}$$
- 103.
$$\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3} \\ xy = 16, x, y > 0 \end{cases}$$
- 104.
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases}$$
- 105.
$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 1 \\ \log_{x+y}(29 + 2xy) = 2 \end{cases}$$
- 106.
$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} + 2 = 0 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+y-1} - 16 = 0 \end{cases}$$
- 107.
$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$
- 108.
$$\begin{cases} 3^x - 2^{y^2} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\frac{y^2}{2}} = 7 \end{cases}$$
- 109.
$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$$
- 110.
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2^x \cdot 6^y = 54 \end{cases}$$
- 111.
$$\begin{cases} x^{y+1} = 27 \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3} \end{cases}$$
- 112.
$$\begin{cases} 2^x 4^y = 32 \\ \ln(x-y)^2 - 2 \ln 2 = 0 \end{cases}$$
- 113.
$$\begin{cases} \sqrt[x]{a} \sqrt[y]{a^{-1}} = 1 \\ \sqrt[x]{bn} : \sqrt[y]{b} = n^p \end{cases}$$
- 114.
$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{x+y} - 5 \cdot 2^{x-y} = 172 \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 4 \cdot 2^{x-y} = 304 \end{cases}$$
- 115.
$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$$
- 116.
$$\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = \sqrt{12} \\ \frac{(x+y)}{2^{x-y}} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{8}}(2^{-1})} \end{cases}$$

● 117.
$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$$

● 118.
$$\begin{cases} (1+y)^x = 100 \\ (y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} = \frac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2} \end{cases}$$

● 119.
$$\begin{cases} 3^x 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases}$$

● 120.
$$\begin{cases} 11^{xz} - 2 \cdot 5^y = 71 \\ 11^z + 2 \cdot 5^{\frac{y}{2}} = 21 \\ 11^{(x-1)z} + 5^{\frac{y}{2}} = 16 \end{cases}$$

● 121.
$$\begin{cases} a^x b^y = c^{nx-1} + c^{nx+1}; \\ a^y b^x = c^{ny-1} + c^{ny+1} \end{cases}$$

(a, b, c sînt numere întregi pozitive). Discuție.

● 122. Să se afle soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ux + vy = a_1; \\ u^2x + v^2y = a_2; \\ u^3x + v^3y = a_3 \end{cases}$$

● 123. Să se calculeze lungimile laturilor unui triunghi, cunoscînd lungimile medianelor corespunzătoare acestor laturi.

● 124. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} ax^3 = by^3 = cz^3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{d} \end{cases}$$

și să se calculeze apoi: $ax^2 + by^2 + cz^2$.

● 125. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+b)(x+y) - xy = ab \\ \frac{1}{2}(c+d)(x+y) - xy = cd \end{cases}$$

și să se arate apoi că :

$$\frac{(x-y)^2}{4} = \frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}$$

● 126. Să se calculeze laturile x, y, z ale unui triunghi știind că volumele generate de triunghi prin rotirea completă în jurul fiecărei laturi sînt echivalente cu volumele a trei sfere de raze α, β, γ .

● 127. Se consideră sistemul de ecuații

$$\begin{cases} E_1(x, y, z) = 2xyz + 2(m^2 - 3)x + 2y + (m - 1)z = 0 \\ E_2(x, y, z) = xyz + (\alpha - m^2)x + my + 3z = 0 \\ E_3(x, y, z) = xyz + mx + z = 0 \end{cases}$$

unde α și m sînt doi parametri reali.

Se cere :

1°. Să se rezolve sistemul în funcție de m și α în cazul cînd are un număr finit de soluții și nici o necunoscută nu este nulă.

2°. Să se găsească și soluțiile sistemului în care numai una din necunoscute este nulă.

3°. Să se precizeze cu ajutorul șirului lui Rolle și după valorile lui α , intervalele în care se găsește m astfel încît să avem :

$$\begin{vmatrix} 2(m^2 - 3) & 2 & m - 1 \\ \alpha - m^2 & m & 3 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4°. În mulțimea $E = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ se definește legea de compoziție internă T dată prin

$$xTy = a(x^2 + y^2) + E_1(x, y, 1); (x \in E, y \in E)$$

unde a este o constantă reală.

Să se găsească valorile lui a și m astfel ca această lege de compoziție să determine pe E o structură de grup și să se arate că acest grup este comutativ.

Să se rezolve sistemele de inecuații :

$$\bullet 128. \begin{cases} 5x^2 + |x| - 6 > 0 \\ -x^2 - 3|x| + 10 < 0 \end{cases} \quad \bullet 129. \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x - 4} > 2 \\ x - \frac{1}{x} > 1 \end{cases}$$

$$\bullet 130. \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ (x^2 + 4x + 5)^2 - (x^2 + 5x - 31)^2 < 0. \end{cases}$$

• 131. Să se rezolve sistemul de inecuații

$$x - y + 3 \geq 0; \quad 2x + y - 5 \leq 0; \quad 3x - 2y + 1 \geq 0; \\ x + y + 2 \geq 0.$$

Dintre soluțiile acestui sistem să se afle acelea care realizează :

1°. $\max \{2x + y\}$, 2°. $\min \{2x + y\}$, 3°. $\max \{x + 2y - 3\}$,

4°. $\min \{x + 2y - 3\}$.

• 132. Să se rezolve sistemul de inecuații

$$x + y + 1 \geq 0, \quad x - y - 3 \leq 0, \quad x - 3y + 3 \geq 0, \\ 5x + 2y - 10 \leq 0.$$

1°. Să se găsească acele soluții ale sistemului care fac maximă, sau minimă, funcția $-2x - 3y + 7$. 2° care este soluția sistemului obținut din cel de mai sus schimbând sensul semnelor de inegalitate.

• 133. Să se rezolve sistemul de inecuații

$$x + 2 \geq 0, \quad x + y \geq 0, \quad x - 3y - 3 \leq 0.$$

Să se găsească acele soluții ale sistemului care fac maximă, sau minimă, funcția $2x + 3y + 6$.

• 134. Să se rezolve sistemul de inecuații

$$-x + 2y - 2 \geq 0, \quad 3x - 2y - 6 \geq 0, \quad 4x + y - 4 \geq 0, \\ 2x + y - 11 \geq 0.$$

Să se găsească acele soluții ale sistemului care fac maximă funcția

$$3x - y - 9.$$

- 135. Să se rezolve sistemul de inecuații

$$x^2 + \frac{y^2}{9} - 1 \leq 0, \quad x + y + 2 \geq 0, \quad y \leq 0.$$

- 136. Să se rezolve sistemul de inecuații

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} - 1 \leq 0, \quad y^2 - 3x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Să se afle acea soluție a sistemului pentru care funcția $f = -x + y + 2$ este maximă.

Cap. VIII. Structuri algebrice

- 1. Se consideră tabela de compunere a unei operații interne. Cum se poate observa din tabelă comutativitatea operației, existența elementului neutru, sau prezența unui element singular? ● 2. În mulțimea $E = \{a, b\}$ se definesc operațiile $*$ și $\top$ determinate de tabelele de mai jos

$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\top$	a	b
a	a	a
b	a	b

- Să se examineze dacă operațiile sînt comutative, dacă admit un element neutru și dacă admit un simetric la fiecare element. Să se studieze distributivitatea fiecărei operații față de cealaltă. Există elemente singulare în cele două operații? ● 3. Într-o structură $(M, *)$, unde M are un număr finit de elemente, se consideră tabela sa de operație. Fie $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in M$, precum și elementele a, b de pe linia lui α și coloanele lui γ și δ și elementele c, d de pe linia lui β și aceleași coloane ca mai sus. Prin urmare, în tabela de operație, a, b, c, d se găsesc în vîrfurile unui dreptunghi. Avem evident $\alpha * \gamma = a, \alpha * \delta = b, \beta * \gamma = c, \beta * \delta = d$. Să se arate că are loc *regula dreptunghiului*: condiția necesară și suficientă ca structura să fie asociativă și comutativă, este ca să avem $a * d = b * c$. ● 4. Pe mulțimea $\mathcal{M}$ a tripletelor ordonate de trei numere reale de forma $a = (x, y, z)$ se definesc legile de compoziție

$$a \top a' = (x, y, z) \top (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$a \perp a' = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx')$$

- 1°. Să se examineze proprietățile acestor două legi. 2° Să se calculeze

$$a \top (a' \top a'') \perp a' \top (a'' \top a) \perp a'' \top (a \top a')$$

- 5. Într-o mulțime E avem o operație $\top$, asociativă și comutativă.

Să se arate că $\forall a, b, c, d \in E$, avem

$$(a \top b) \top (d \top c) = (b \top d) \top (a \top c).$$

● 6. Pentru legea internă de compunere (notată $*$) și definită prin tabelul

$*$	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

să se determine toate elementele x care verifică relațiile

$$x * b = 0; \quad x * x = c; \quad x * x = x$$

$$c * x = x.$$

● 7. În mulțimea $\mathfrak{P}(E)$ a părților unei mulțimi E , se definește operația, notată cu Δ , care la două submulțimi A și B ale lui E , face să corespundă mulțimea $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. 1° Să se construiască o schemă pentru a arăta această operație. 2° Să se examineze dacă operația este comutativă, asociativă, dacă are element neutru și element simetric. 3° Să se arate că operația de intersecție $\cap$, este distributivă față de operația Δ . ● 8. Fie o mulțime E de trei elemente a, b, c , dotată cu o lege internă de compunere, cunoscută incomplet prin tabelul

$*$	a	b	c
a			c
b		a	
c	a		

1° Există asociativitate, oricare ar fi modul de completare a tabloului? Este imposibil ca să avem asociativitate? 2° Aceeași problemă pentru comutativitate. 3° Poate exista element neutru? ● 9. Ace-

leăși întrebări ca mai sus, pentru mulțimea de patru elemente și legea internă de compunere cunoscută incomplet prin tabelul

$*$	a	b	c	d
a		a	b	
b	a	b	c	d
c	b	c	b	
d		d		

- 10. În mulțimea E avem o operație (notată $\top$) care este asociativă. Fie a un element fix din E . Se definește o nouă operație (notată $*$) care face să-i corespundă perechii (x, y) , elementul $x * y = x \top a \top y$. 1° Să se arate că operația $*$ este asociativă. 2° Să se arate că operația $*$ este comutativă, dacă operația $\top$ are această proprietate. 3° Presupunând că operația comutativă $\top$ are un element neutru e și că orice element admite un simetric, să se arate că operația $*$ are un element neutru și că la fiecare element îi corespunde un element simetric. ● 11. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

- în corpul claselor de resturi modulo 5. ● 12. În mulțimea numerelor reale, se definește operația $a * b = a^b$. Să se arate că ea nu este comutativă, nu este asociativă și că admite element neutru numai la dreapta. ● 13. Matricele $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbf{Z}$, formează un grup în raport cu înmulțirea matricelor. ● 14. Să se examineze dacă matricele

$$M(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \theta e^{i\varphi} & \sin \theta e^{i\varphi} \\ -\sin \theta e^{-i\varphi} & \cos \theta e^{-i\varphi} \end{bmatrix},$$

- unde θ și φ iau valori arbitrare, formează un grup multiplicativ. Să se considere apoi cazul particular $\varphi = 0$. ● 15. Se consideră grupul G al matricelor de forma

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a, b, c, \in \mathbf{R}.$$

Să se determine subgrupurile comutative ale lui G și în particular cele izomorfe cu $\mathbf{R}_+$. Operația este cea de înmulțire a matricelor.

- 16. Se consideră mulțimea funcțiilor

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}; \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Să se demonstreze că operația de compunere a funcțiilor determină pe mulțimea precedentă un grup.

- 17. Să se arate că mulțimea funcțiilor

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{x + \sqrt{3}}{1 - x\sqrt{3}}, \quad f_3(x) = \frac{x - \sqrt{3}}{1 + x\sqrt{3}}$$

cu legea de compunere a funcțiilor, formează un grup. Să se rezolve ecuațiile $f^n = f_i$, $i = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \dots$

- 18. Să se studieze legea de compoziție

$$a * b = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

unde fie că $a, b \geq 0$, fie că $a, b \in \mathbf{R}$. $|a - b|$ este valoarea absolută a lui $a - b$. ● 19. Să se determine funcția φ , astfel încât pentru mulțimea perechilor de numere nenule (a, b) , legea de compunere $(a, b) * (a', b') = (aa', b'\varphi(b))$, să determine un grup. Subgrupuri.

- 20. Să se arate că mulțimea matricelor reale de forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}, \quad ac \neq 0,$$

determină un grup multiplicativ, față de înmulțirea matricelor. Să se determine subgrupurile comutative. ● 21. Fiind date

$$\mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} e^{-x} & 0 \\ 2 \operatorname{sh} x & e^x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

construim matricele

$$\mathbf{M}(x, y) = \mathbf{A}(x) + y \mathbf{B}; \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

Să se determine o operație internă care să stabilească o structură de grup pe mulțimea matricelor $\mathbf{M}(x, y)$. (Pentru aceasta din urmă se va căuta o combinație de operații cu matrice, astfel ca în urma aplicării ei să se găsească tot o matrice de forma $\mathbf{M}(x, y)$). ● 22. Fie $\mathfrak{M}$

mulțimea matricelor $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, unde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$. Se definește operația internă

$$X * Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ x_3 y_3 \end{bmatrix}.$$

Să se examineze proprietățile acestei operații. În ce caz ea determină un grup pe mulțimea $\mathcal{M}$. ● 23. În mulțimea numerelor reale se definește operația $a * b = \frac{a+b}{2}$ (media aritmetică). Să se exa-

mineze dacă ea determină un grup. ● 24. Se consideră mulțimea M a următoarelor 6 deplasări ale unui triunghi echilateral ABC : I nu este mișcare, R_1, R_2 rotații de 120° , respectiv 240° , în jurul centrului triunghiului, S_1, S_2, S_3 simetrii față de medianele ce trec în ordine prin A, B, C . Pe această mulțime considerăm operația de compunere, notată $*$, care constă în efectuarea succesivă a două deplasări. Să se examineze structura $(M, *)$. Cum este posibil ca $R_1 * S_1 = S_1 * R_2$, cu toate că $R_1 \neq R_2$? Ce structuri formează mulțimile $\{I, R_1, R_2\}$ și $\{I, S_1, S_2, S_3\}$? ● 25. 1° Dacă E este mulțimea elementelor A, B, C , să se arate că există numai 6 bijecții E pe E , pe care le notăm cu $f_1, \dots, f_6$ și a căror mulțime este M . În această mulțime se definește operația compunerii a două bijecții. Să se întocmească tabela acestei operații și să se studieze proprietățile operației. ● 26. Să se examineze structura claselor de resturi modulo 5, față de adunarea și înmulțirea claselor de resturi. Să se arate că ea este izomorfă cu mulțimea rădăcinilor de ordinul 5 ale unității. ● 27. Să se examineze structura claselor de resturi modulo 6, față de adunarea și înmulțirea claselor de resturi. ● 28. Fie $(G, *)$ un grup comutativ cu elementul neutru n . În mulțimea G să introducem și operația notată $\perp$ și așa ca $\forall a, b \in G, a \perp b = n$. Să se arate că $(G, *, \perp)$ este un inel. Să se găsească toți divizorii lui zero și subinelele lui $(G, *, \perp)$. ● 29. Să se arate că mulțimea $\mathcal{M}$ a matricelor de ordin n , triunghiulare sus, este un inel cu element unitate în raport cu adunarea și înmulțirea matricelor. ● 30. Să se examineze structura mulțimii matricelor

$$X(a, b, c) = \begin{bmatrix} a - b - c & b & c \\ c & a - b - c & b \\ b & c & a - b - c \end{bmatrix}$$

în raport cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire a matricelor.

● 31. Pe mulțimea perechilor ordonate a numerelor întregi se stabilesc două legi de compoziție $(a,b) \circ (a',b') = (a + a', b + b')$, $(a,b) * (a', b') = (aa' + 2bb', ab' + ba')$. Se cere să se stabilească structura definită de aceste legi pe mulțimea dată. ● 32. Se consideră mulțimea M a numerelor reale de forma $a + b\sqrt{2}$, unde a și b sînt numere întregi. 1° Să se arate că $a + b\sqrt{2} = 0$, implică $a = b = 0$. 2° În mulțimea M se definește adunarea și înmulțirea obișnuită a numerelor reale. Să se studieze structura obținută. Să se arate că elementul $a + b\sqrt{2}$ nu are simetric față de înmulțire decît dacă $a^2 - 2b^2 = \pm 1$. ● 33. Pe mulțimea $\mathfrak{M} = R \times R$ se definesc operațiile

$$(a,b) \circ (c,d) = (a + c, b + d)$$

$$(a,b) \bullet (c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Să se arate că $(\mathfrak{M}, \circ, \bullet)$ formează un corp. ● 34. Pe mulțimea $\mathfrak{M}$ a perechilor ordonate de numere reale $z = (x,y)$, se definesc legile de compoziție

$$z \top z' = (x,y) \top (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$z \perp z' = (xx', xy' + x'y).$$

1° Care este structura definită de aceste operații pe mulțimea $\mathfrak{M}$? 2° Se poate face o legătură între corpul numerelor reale și structura precedentă? 3° Să se calculeze $z \perp z \perp \dots \perp z = z^n$. 4° Fiind date elementele $u = (a, b)$ și $v = (c, d)$ să se rezolve și să se discute ecuația $z^2 + 2u \perp z = v$. Aplicații pentru u și v : $(4,1)$, $(-7,4)$; $(4,2)$, $(-16,8)$; $(4,2)$, $(16, -16)$.

SOLUȚII

Cap. I. Expresii matematice

- 1. Avem $\frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}} = \frac{-\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{-1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k}}$, deci $S = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. ● 2. 2. ● 3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. ● 4. $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt[4]{8}}$
- 5. $3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. ● 6. $24abc$. ● 7. $\frac{(m+1)x+4}{2x+m}$. ● 8. 2.
- 9. $\frac{x^6 + x^2 + x + 1}{|x^2 + x + 1|}$. ● 10. $a + b + c + d$. ● 11. $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$.
- 12. $F = 1$ pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ și $F = -1$ pentru $x \in (0, 1)$. ● 13. 1°. $E_1 = 2abx$; $E_2 = a^2$; $E_3 = b^2x^2$. 2°. $(a + bx)^2$; 3°. $(2 + a^2 - b^2x^2)(2 - a^2 + b^2x^2)$. ● 14. $x = 12$, $y = 4$ și apoi $E = 4^2$. ● 15. Cum $x^2 = 5x - 3$, $x^3 = 22x - 15$, rezultă că valoarea polinomului este 22, aceeași pentru ambele rădăcini ale trinomialului. ● 16. Rădăcinile ecuației sînt rădăcinile cubice primitive ale unității, deci $x^3 = 1$. Atunci $E = -1$. ● 17. $b = a^4 - 4a^2 + 2$.
- 18. $(-x^2 + y^2 + z^2)(x^2 - y^2 + z^2)(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2)$.
- 19. $2(x^2 + xy + y^2)^2$. ● 20. $5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$. ● 21. Se ordonează după puterile lui a ; $(a + b)(b + c)(c + a)$. ● 22. Se ordonează după puterile lui x ; $(x^2 - y)(y^2 - z)(z^2 - x)$. ● 23. Polinomul este simetric și omogen de gradul cinci. El se anulează dacă $a = b$, deci se divide cu $a - b$. Fiind simetric, se divide și cu $b - c$ și $c - a$, deci avem $P = (a - b)(b - c)(c - a)[A(a^2 + b^2 + c^2) + B(ab + bc + ca)]$. Căutînd coeficienții lui a^4b din ambii membrii, găsim $A = -3$ și apoi cu $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$, avem $B = -5$, deci $P = -(a - b)(b - c)(c - a)[3(a^2 + b^2 + c^2) + 5(ab + bc + ca)]$.
- 24. Punînd $x = -y - z$, avem $P(-y - z, y, z) = 0$, deci polinomul are factorul $x + y + z$. Prin împărțire, sau prin metoda coeficienților nedeterminați, găsim $P(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$. Notînd cu ε și ε^2 rădăcinile cubice primitive ale unității, avem $P = (x + y + z)(x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z)(x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z)$.
- 25. $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$. ● 26. Dacă expresia B este un pătrat

perfect, ținând seama de primii doi termeni și de ultimii doi, avem sau $B = (x^3 - x^2 + x - 1)^2$, sau $B = (x^3 - x^2 - x + 1)^2$. Prima corespunde. ● 27. $-(a + b + c)(a - b - c)(a - b + c)(a + b - c)$. Rezultatul este pozitiv, căci într-un triunghi suma a două laturi este

mai mare decât a treia. ● 28. $\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}$. ● 29. a. La

numărător se pune în evidență factorul $(x + y - z)^3$ și după simplificare, găsim $E = \frac{x + y + z}{x + y - z}$, b. $z_1 = 1, z_2 = 4$; c. $x = -2$,

$y = 8, E(-2, 8, 4) = 5$. ● 30. Cîtul a două polinoame de o variabilă și de același grad, este independent de variabilă, dacă cele două polinoame au coeficienții proporționali. În cazul nostru avem

identitatea $\frac{2 \cos 3x \cos x}{\frac{1}{2} \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \right)} = \frac{8 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x}$. $E = 4(\cos 2x + 1)$.

● 31. $b = a, b = c$. ● 32. Cum $(x^2 + x + 1)^2 - (2x^3 + x^2 + 2x) = (x^2 + 1)^2$, avem pentru $x > 0$, $E = \sqrt{\frac{2x^2 + x + 2}{2}} + \sqrt{\frac{x}{2}}$.

● 33. $a = 1, b = -1$, sau $a = -1, b = 1$. ● 34. Trebuie să avem $P(x) \equiv (x^2 + 1)Q(x)$ și $P(x) - 1 \equiv (x^3 + 1)R(x)$. Presupunînd că toate polinoamele au coeficientul celei mai mari puteri a lui x egal cu unitatea, dacă gradul lui $P(x)$ este n , gradele polinoamelor $Q(x)$ și $R(x)$ sînt respectiv $n - 2$ și $n - 3$. În cele trei polinoame avem deci de determinat $3n - 5$ coeficienți, iar din cele două identități avem $2n$ relații. Rezultă că $3n - 5 = 2n$, deci $n = 5$.

Metoda coeficienților nedeterminați ne dă $P(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 +$

$+\frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ și descompunerile $P(x) \equiv (x^2 + 1) \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right)$, $P(x) \equiv (x^3 + 1) \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right)$. Genera-

lizare. Dacă gradele polinoamelor $Q(x)$ și $R(x)$ sînt q și r , iar gradul polinomului $P(x)$ este n , trebuie ca $n + n - r + n - s = 2n$, deci $n = r + s$. ● 35. Presupunînd că gradul lui $Q(x)$ este m , gradul lui $P(x)$ trebuie să fie $n + m - 2$. Cele două polinoame au atunci împreună $n + 2m - 2$ coeficienți, afară de primii coeficienți care pot fi luați -1 și respectiv $+1$. Pentru determinarea lor avem

$m + n$ relații, deci trebuie ca $m + n = n + 2m - 2$, deci $m = 2$. Se găsește apoi $1 - x \cos \varphi \equiv x^n [-x^2 + (2 \cos \varphi - \cos (n-1)\varphi)x + \cos n\varphi - 1] + (1 - 2x \cos \varphi + x^2)(x^n + x^{n-1} \cos (n-1)\varphi +$

+ $x^{n-2}\cos(n-2)\varphi + \dots + x\cos\varphi + 1$). ● 36. Se constată că polinomul $f(x)$ trebuie să fie de gradul patru. Se găsește $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$. ● 37. Notînd polinomul cu $P(x)$ și dînd lui x valorile $0, 1, 2, \dots, n$, avem $a_0 = P(0)$, $a_0 + a_1 = P(1)$, $a_0 + 2a_1 + 2!a_2 = P(2)$, $\dots$, $a_0 + na_1 + n(n-1)a_2 + \dots + n!a_n = P(n)$, sistem din care rezultă $a_0, a_1, \dots, a_n$. ● 38. Rezultă $\lambda = 1$ și $\mu = 0$, deci avem transformarea identică, iar polinomul $A(z)$ este arbitrar. ● 39. Inducție completă. Pentru $n = 2$, proprietatea este adevărată, căci $f(x+y, 2, h) = f(x, 2, h) + C_2^1 f(x, 1, h)f(y, 1, h) + f(y, 2, h) = x(x-h) + 2xy + y(y-h) = (x+y)(x+y-h)$. Presupunem că formula din enunț este adevărată. Să arătăm că ea se menține cînd înlocuim pe n cu $n+1$. Avem $f(x+y, n+1, h) = (x+y-nh)f(x+y, n, h) = (x+y-nh) \cdot [f(x, n, h) + C_n^1 f(x, n-1, h)f(y, 1, h) + \dots + C_n^n f(y, n, h)] = (x-nh)f(x, n, h) + yf(x, n, h) + (x-(n-1)h)C_n^1 f(x, n-1, h)f(y, 1, h) + (y-h)C_n^1 f(x, n-1, h)f(y, 1, h) + (x-(n-2)h) \cdot C_n^2 f(x, n-2, h)f(y, 2, h) + (y-2h)C_n^2 f(x, n-2, h)f(y, 2, h) + \dots + xC_n^n f(y, n, h) + (y-nh)C_n^n f(y, n, h)$. Primul termen este $f(x, n+1, h)$. Al doilea și cu al treilea dau $C_{n+1}^1 f(x, n, h)f(y, 1, h)$. Al patrulea și al cincilea dau $C_{n+1}^2 f(x, n-1, h)f(y, 2, h)$ ș.a.m.d., în general trebuie să adunăm termenii $(y-(k-1)h)C_n^{k-1} f(x, n-k+1, h)f(y, k-1, h)$ și $(x-(n-k)h)C_n^k f(x, n-k, h)f(y, k, h)$, care dau $C_{n+1}^k f(x, n-k+1, h)f(y, k, h)$. Cum ultimul termen din dezvoltare se poate scrie $C_{n+1}^{n+1} f(y, n+1, h)$, demonstrația este terminată. ● 40. 1° Presupunem $n = 2m$. Avem identitatea $(x-1)^{2m} + (x+1)^{2m} - 1 \equiv (x^2-1)Q(x) + ax + b$. Pentru $x = 1$ și $x = -1$, găsim $a = 0$ și $b = 2^{2m} - 1$. Trebuie deci să avem $(x-1)^{2m} + (x+1)^{2m} - 2^{2m} \equiv (x^2-1)Q(x)$. Făcînd împărțirea dintre polinomul din partea întîia și x^2-1 , găsim $Q(x) = x^{2m-2} + (C_{2m}^2 + 1)x^{2m-4} + \dots + (C_{2m}^{2m-2} + C_{2m}^{2m-4} + \dots + 1)$. 2° Dacă $n = 2m+1$, avem analog $(x-1)^{2m+1} + (x+1)^{2m+1} - 1 \equiv (x^2-1)[x^{2m-1} + (C_{2m+1}^2 + 1)x^{2m-3} + \dots + (C_{2m+1}^{2m-2} + C_{2m+1}^{2m-4} + \dots + 1)x] + 2^{2m+1}x - 1$. ● 41. Trebuie să avem $ax^4 + bx^2 + c \equiv (ax^2 + bx + c)(x^2 + dx + e)$, deci $ad + b = 0$, $ae + c + bd = b$, $be + cd = 0$, $ce = c$. Se obțin următoarele identități $a(x^4 - 1) \equiv a(x^2 - 1)(x^2 + 1)$, $a(x^4 - x^2) \equiv a(x^2 - x)(x^2 + x)$, $a(x^4 + x^2 + 1) \equiv a(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, $a(x^4 - 2x^2 + 1) \equiv a(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)$. ● 42. Avem $P[P(z)] - z = a[P^2(z) - z^2] + b[P(z) - z] + az^2 + bz + c = [P(z) - z][aP(z) +$

$+ az + b + 1]$. Aplicație. Avem $P[P(z)] - z = (z^2 - 3z + 1)^2 - 3z^2 + 8z - 2 = (z^2 - 4z + 1)(z^2 - 2z - 1)$, care are rădăcinile $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$. ● 43. Trebuie să avem $f(x) + 1 = (x - 1)^3 Q_1(x)$, $f(x) + 2 = x^4 Q_2(x)$. Dacă polinomul $f(x)$ este de gradul n , $Q_1(x)$ are gradul $n - 3$, iar $Q_2(x)$ gradul $n - 4$. Presupunând că toate trei au primul coeficient egal cu unitatea, avem în total $3n - 7$ coeficienți de determinat din $2n$ ecuații, deci $3n - 7 = 2n$, așa că $n = 7$. Găsim apoi $f(x) = x^7 + x^6 - x^4 - 2$, $Q_1(x) = x^4 + x^3 + 1$, $Q_2(x) = x^3 + x^2 - 1$. ● 44. Trebuie să avem $P(1) = P'(1) = 0$, deci $A = n$, $B = -(n + 1)$. Avem apoi $P(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1 = n(x^{n+1} - x^n) - (x^n - 1) = (x - 1)^2 [nx^{n-1} + (n - 1)x^{n-2} + \dots + 2x + 1]$. ● 45. Putem scrie $P(x) = a_n + a_{n-2}x^2 + a_{n-4}x^4 + \dots + x(a_{n-1} + a_{n-3}x^2 + a_{n-5}x^4 + \dots)$, sau $P(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2)$. Împărțind cele două polinoame în variabila x^2 , cu $x^2 + 1$, avem $\varphi(x^2) \equiv (x^2 + 1)\varphi_1(x^2) + \varphi(-1)$, $\psi(x^2) \equiv (x^2 + 1)\varphi_2(x^2) + \psi(-1)$, unde φ_1 și φ_2 sînt de asemenea polinoame în x^2 . Rezultă $P(x) \equiv (x^2 + 1)[\varphi_1(x^2) + x\varphi_2(x^2)] + \varphi(-1) + x\psi(-1)$. Dar $\varphi(-1) = a_n - a_{n-2} + a_{n-4} - \dots$, $\psi(-1) = a_{n-1} - a_{n-3} + a_{n-5} - \dots$, deci proprietatea este dovedită. ● 46. Notînd $n = pq + r$ și efectuînd împărțirea, avem cîtul $x^{n-p} + a^p x^{n-2p} + \dots + a^{pq-p} x^{n-pq}$ și restul $a^{pq}(x^r - a^r)$. Pentru ca împărțirea să se facă exact, trebuie ca $r = 0$, deci n să se dividă cu p . ● 47. Trebuie să avem $(x - a)(x^2 - 4x + 5) + r_1 \equiv (x - b)(x^2 - 6x + 3) + r_2$. Rezultă $a = 7$, $b = 5$, $r_1 = 36$, $r_2 = 16$, iar polinomul este $x^3 - 11x^2 + 33x + 1$. ● 48. Trebuie să avem $x^6 + ax^4 + bx^2 + c \equiv -(x^3 + ax^2 + bx + c)(-x^3 + ax^2 - bx + c)$ și rezultă $a = 2b - a^2$, $b = b^2 - 2ac$, $c = -c^2$. Se obțin polinoamele x^3 , $x^3 - x^2$, $x^3 + x^2 + x$, $x^3 - 2x^2 + x$, $x^3 - 1$, $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $x^3 + \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}x^2 + \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}x - 1$. ● 49. Notînd polinomul cu $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, trebuie să avem $n(x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n) \equiv (x - \alpha)[nx^{n-1} + (n - 1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}]$. Prin identificare găsim $\alpha n = -a_1$, $\alpha(n - 1)a_1 = -2a_2$, $\dots$, $\alpha(n - p + 1)a_{p-1} = -pa_p$, $\dots$, $\alpha a_{n-1} = -na_n$, de unde $a_p = (-1)^p \alpha^p C_n^p$, $p = 1, 2, \dots, n$ și $\alpha = -\frac{a_1}{n}$. Rezultă că avem $P(x) = x^n - C_n^1 \alpha x^{n-1} + \dots + (-1)^p C_n^p \alpha^p x^{n-p} + \dots + (-1)^n C_n^n \alpha^n$, deci $P(x) = (x - \alpha)^n$, care evident se divide cu derivata sa $n(x - \alpha)^{n-1}$. Rezultatul se putea obține și pe baza următorului raționament. Dacă polinomul se divide cu derivata lui, rădăcinile derivatei trebuie să

fie și rădăcini ale polinomului, mai precis, cel puțin rădăcini duble ale polinomului. Dacă derivata ar avea $n - 1$ rădăcini simple, polinomul ar trebui să aibă $2n - 2$ rădăcini, deci $n = 2$, caz în care derivata are o singură rădăcină. Dacă derivata ar avea o rădăcină dublă și $n - 3$ rădăcini simple, polinomul ar trebui să aibă $2n - 6 + 3 = 2n - 3$ rădăcini, deci $n = 3$, caz în care derivata are o singură rădăcină și aceasta dublă. Raționând în continuare la fel, se ajunge la concluzia că derivata are o singură rădăcină, multiplă de ordinul $n - 1$ și polinomul aceeași rădăcină multiplă de ordinul n . ● 50. Trebuie să avem $x^{2n} - 2x^n \cos n\alpha + 1 \equiv (x^2 - 2x \cos \alpha + 1)(x^{2n-2} + b_1 x^{2n-3} + b_2 x^{2n-4} + \dots + b_{2n-2}) + c_1 x + c_2$, deci $0 = b_1 - 2 \cos \alpha$, $0 = b_2 - 2b_1 \cos \alpha + 1$, $0 = b_3 - 2b_2 \cos \alpha + b_1$, $\dots$, $0 = b_{n-1} - 2b_{n-2} \cos \alpha + b_{n-3}$, $-2 \cos n\alpha = b_n - 2b_{n-1} \cos \alpha + b_{n-2}$, $0 = b_{n+1} - 2b_n \cos \alpha + b_{n-1}$, $\dots$, $0 = b_{2n-2} - 2b_{2n-3} \cos \alpha + b_{2n-4}$, $0 = c_1 - 2b_{2n-2} \cos \alpha + b_{2n-3}$, $0 = c_2 + b_{2n-2}$. Rezultă $b_1 = 2 \cos \alpha$, $b_2 = 2 \cos 2\alpha + 1$, $b_3 = 2 \cos 3\alpha + 2 \cos \alpha$, $b_4 = 2 \cos 4\alpha + 2 \cos 2\alpha + 1$. Prin inducție completă se arată că $b_{2k} = 2 \cos 2k\alpha + 2 \cos(2k-2)\alpha + \dots + 2 \cos 2\alpha + 1$, pentru $2k < n$ și $b_{2k+1} = 2 \cos(2k+1)\alpha + 2 \cos(2k-1)\alpha + \dots + 2 \cos \alpha$, pentru $2k+1 < n$. Presupunând că n este par, avem apoi $b_n = 2 \cos(n-2)\alpha + 2 \cos(n-4)\alpha + \dots + 2 \cos 2\alpha + 1$, $b_{n+1} = 2 \cos(n-3)\alpha + 2 \cos(n-5)\alpha + \dots + 2 \cos \alpha$, $\dots$, $b_{2n-3} = 2 \cos \alpha$, $b_{2n-2} = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Presupunând că n este impar, avem $b_n = 2 \cos(n-2)\alpha + 2 \cos(n-4)\alpha + \dots + 2 \cos \alpha$, $b_{n+1} = 2 \cos(n-3)\alpha + 2 \cos(n-5)\alpha + \dots + 2 \cos 2\alpha + 1$, $\dots$, $b_{2n-3} = 2 \cos \alpha$, $b_{2n-2} = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. În ambele cazuri împărțirea se face exact. Coeficienții cîtului sînt dați mai sus. ● 51. Primii doi termeni de la cît sînt $x^{n-2} \sin \varphi$, $rx^{n-3} \sin 2\varphi$, iar primele două resturi parțiale sînt $rx^{n-1} \sin 2\varphi - r^2 x^{n-2} \sin \varphi$, $r^2 x^{n-2} \sin 3\varphi - r^3 x^{n-3} \sin 2\varphi$. Presupunem că al k -lea rest este $r^k x^{n-k} \sin(k+1)\varphi - r^{k+1} x^{n-k-1} \sin k\varphi$. Termenul corespunzător la cît este $r^k x^{n-k-2} \sin(k+1)\varphi$ și cum $\sin k\varphi - 2 \cos \varphi \sin(k+1)\varphi = \sin k\varphi - \sin(k+2)\varphi - \sin k\varphi = -\sin(k+2)\varphi$, restul corespunzător este $r^{k+1} x^{n-k-1} \sin(k+2)\varphi - r^{k+2} x^{n-k-2} \sin(k+1)\varphi$. Presupunând că am ajuns la restul $r^{n-3} x^3 \sin(n-2)\varphi - r^{n-2} x^2 \sin(n-3)\varphi$, termenul corespunzător la cît este $r^{n-3} x \sin(n-2)\varphi$, iar restul este $r^{n-2} x^2 \sin(n-1)\varphi - 2r^{n-1} x \sin(n-1)\varphi \cos \varphi + r^n \sin(n-1)\varphi$. Ultimul termen al cîtului este $r^{n-2} \sin(n-1)\varphi$ și împărțirea se face exact. Cîtul este $x^{n-2} \sin \varphi + rx^{n-3} \sin 2\varphi + \dots + r^{n-2} \sin(n-1)\varphi$. ● 52. Împărțirea polinomului $P(x)$ cu $x - 2$ se face exact. Cum $(x-1)^n - 1 = (x-2)[(x-1)^{n-1} + (x-1)^{n-2} + \dots + (x-1) + 1]$, cîtul împărțirii este $(x-2)^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-1)^{n-2} + \dots + (x-1) + 1$. ● 53. Se verifică imediat că

$+1$ și -1 sînt rădăcini ale polinomului. În plus, $(x+1)^q - 2^q$ este divizibil prin $x-1$ și cîțul este $(x+1)^{q-1} + 2(x+1)^{q-2} + \dots + 2^{q-1}$. Atunci cîțul împărțirii polinomului dat prin $x-1$ este $Q = \frac{1}{4^p} (x-1)^{2p-1} + \frac{1}{2^q} [(x+1)^{q-1} + 2(x+1)^{q-2} + \dots + 2^{q-2}(x+1) + 2^{q-1}] = \frac{1}{2^{2p}} (x-1)^{2p-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^q} [(x+1)^{q-1} + 2(x+1)^{q-2} + \dots + 2^{q-2}(x+1)]$. Dar $\frac{1}{2^{2p}} (x-1)^{2p-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{2p}} [(x-1)^{2p-1} + 2^{2p-1}]$ este divizibil prin $x-1+2 = x+1$ și cîțul este $(x-1)^{2p-2} - 2(x-1)^{2p-3} + \dots + 2^{2p-2}$. Împărțind polinomul Q prin $x+1$, avem $\frac{1}{2^{2p}} [(x-1)^{2p-2} - 2(x-1)^{2p-3} + \dots + 2^{2p-2}] + \frac{1}{2^q} [(x+1)^{q-2} + 2(x+1)^{q-3} + \dots + 2^{q-2}]$, deci cîțul căutat este $\frac{1}{2^{2p}} [(x-1)^{2p-2} - 2(x-1)^{2p-3} + \dots + 2^{2p-2}] + \frac{1}{2^q} [(x+1)^{q-2} + 2(x+1)^{q-3} + \dots + 2^{q-2}]$. ● 54. Trebuie să

avem $f(x^2) = \left[x^3 + \frac{1+i\sqrt{7}}{2} x^2 - \frac{1-i\sqrt{7}}{2} x - 1 \right] (x^3 + px^2 + qx + 1)$. Rezultă $p = -\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, $q = -\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$, deci $f(x^2) =$

$= f(x)g(x)$, unde $g(x) = -f(-x)$. ● 55. $E_n(-1) = y^n - (-1)^n - y^n - 1 = 0$, căci $(-1)^n = -1$; $E_n(-y) = 1^n - (-y)^n - y^n - 1 = 0$. Polinomul este deci divizibil prin $(x+y)(x+1)$ și apoi analog este divizibil prin $(y+x)(y+1)$. Deci E_n este divizibil prin $(x+1)(y+1)(x+y)$. Dacă $n=3$, $E_3 = \lambda(x+1)(y+1)(x+y)$, λ fiind o constantă. Pentru $x=y=1$, găsim $\lambda=3$ și avem $(x+y+1)^3 - x^3 - y^3 - 1 = 3(x+1)(y+1)(x+y)$. ● 56. Avem $P(x, y) \equiv (x-y)^{2k-1} Q(x, y)$. Dacă $P(x, y)$ este simetric, rezultă $Q(x, y) = -Q(y, x)$. Făcînd $x=y$, rezultă $Q(x, x) = 0$, deci polinomul $Q(x, y)$ se divide cu $x-y$. ● 57. Polinoamele au rădăcinile $+1$ și -1 multiple. $(x^2-1)^2$. ● 58. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. ● 59. Polinoamele sînt prime între ele. ● 60. $x^2 + x + 1$. ● 61. Cîturile celor două polinoame prin c.m.m.d.c. al lor $x^2 - 1$, sînt $A = x^2 - x - 6$, $B = 2x^2 + 5x - 3$. ● 62. Notînd polinoamele cu P_1, P_2 , c.m.m.d.c. al lor cu D , suma lor cu S și c.m.m.m.c. cu M ,

avem $P_1 + P_2 = S$, $M = \frac{P_1 P_2}{D}$. Cum $P_1 = DQ_1$, $P_2 = DQ_2$, unde

Q_1 și Q_2 sînt prime între ele, avem $D(Q_1 + Q_2) = S$, $Q_1 Q_2 D = M$, deci D este c.m.m.d.c. al polinoamelor date S și M . Rezultă apoi Q_1 și Q_2 . ● 63. Metoda coeficienților nedeterminați. Rezultă $A(x)[(1-n)^{n-1} + n^n] = n^n + n^{n-1}(1-n)x + \dots + n^2(1-n)^{n-2}x^{n-2}$, $B(x)[(1-n)^{n-1} + n^n] = (1-n)^{n-1} - n^{n-1}x - \dots - n(1-n)^{n-2}x^{n-1}$. Identitatea arată că cele două polinoame sînt prime între ele (Cum al doilea este derivata primului, înseamnă că ecuația $x^n + x + 1 = 0$, nu poate avea rădăcini multiple).

● 64. $L_3(x) = x^3 - x - 1$. ● 65. $x^4 - 1$. ● 66. $A(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 49x + 25$. ● 67. Avem identitatea $P(x) \equiv (x-a)(x-b)(x-c)Q(x) + R(x)$ unde $R(x)$ este de gradul doi. $R(a) = P(a)$, $R(b) = P(b)$, $R(c) = P(c)$. Trebuie să se determine deci un polinom de gradul doi cunoscînd valorile lui $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$

pentru a , b și c . Acesta este $R(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} P(a) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} P(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} P(c)$.

● 68.
$$\frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+x+1}.$$

● 69.
$$\frac{x^4}{x^3+1} = x + \frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2-x+1}.$$

● 70.
$$\frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

● 71. Dezvoltăm polinomul de la numărător după puterile lui $x^2 + 1$. În acest scop avem împărțirile $x^5 + x^4 - 2x^2 + x + 3 \equiv (x^2 + 1) \cdot (x^3 + x^2 - x - 3) + 2x + 6$, $x^3 + x^2 - x - 3 = (x^2 + 1)(x + 1) - 2x - 4$, deci $x^5 + x^4 - 2x^2 + x + 3 \equiv (x^2 + 1)^2(x + 1) - (x^2 + 1)(2x + 4) + 2x + 6$, de unde $\frac{x^5 + x^4 - 2x^2 + x + 3}{(x^2 + 1)^3} \equiv$

$$\equiv \frac{2x + 6}{(x^2 + 1)^3} - \frac{2x + 4}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x + 1}{x^2 + 1}.$$

● 72. $F = x + 7 + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{21}{x-1} + \frac{46}{x-2}$.

● 73. $\frac{1}{7x} - \frac{1}{7(x+1)} - \frac{1}{7(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{7(x^2+x+1)}$.

● 74. Avem $x^4 + a \equiv (x^2 - x + 1)^2 + (2x - 1)(x^2 - x + 1) + a - x$ și fracțiile simple sînt $\frac{a-x}{(x^2-x+1)^m} + \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^{m-1}} + \frac{1}{(x^2-x+1)^{m-2}}$.

● 75. Aducînd la numitor comun, se ajunge la identitatea $1 \equiv (Ax+B)P_2(x) + (Cx+D)P_1(x)$. Ținînd seama că polinoamele $P_1(x)$ și $P_2(x)$ au gradul doi, partea a doua a identității are gradul trei, deci prin identificare vom obține patru ecuații cu patru necunoscute A, B, C și D .

● 76. Avem $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n}$ și $A_k = \frac{P(a_k)}{P'(a_k)}$ deci $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{P(a_1)}{Q'(a_1)} \frac{1}{x-a_1} + \dots + \frac{P(a_n)}{Q'(a_n)} \frac{1}{x-a_n}$. Aducînd la numitor

comun și observînd că în partea întîia coeficientul lui x^{n-1} este nul, rezultă egalitatea cerută. ● 77. Se descompune fracția rațională $\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$ în elemente simple. $S_n = \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{3}{2(n+2)}$.

● 78. Termenul general se descompune în fracțiile simple $\frac{1}{5} - \frac{1}{(5k-4)^2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{(5k+1)^2}$. Avem $S_n = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{(5n+1)^2}$.

● 80. $\frac{4a}{1-a}$. ● 81. $\log_3 5 = \frac{\log_6 5}{\log_6 3} = \frac{\log_6 5}{\log_6 \frac{6}{2}} = \frac{b}{1-a}$. ● 82. Se ține

seama că $3 = \lg 1000 = \lg 8.125 = 3 \lg 2 + \lg 125$. Găsim $\lg 125 = 2.097$. ● 83. Notînd $x = \log_{ak} N$, se găsește $\log_a N = x + x \log_a k$, care este relația căutată. ● 84. Se trece la baza x . ● 85. Notînd $x = \log_{a^n}(N^n)$, avem $N^n = (a^n)^x = a^{nx}$, de unde $n \log_a N = nx$.

● 86. Se trece la logaritmi în baza N . ● 87. Se iau logaritmi zecimali în cele trei relații. ● 88. În partea întîia se trece la logarit-

mii în baza N . ● 89. Se trece la logaritmi în baza a . ● 90. Expresia anulându-se pentru $y = -x$, se divide cu $x + y$. Cum ea este simetrică, se divide și cu $y + z$ și $x + z$, deci ea este identic egală cu o expresie de forma $A(x + y)(y + z)(z + x)$. Făcând $z = 0$, se poate arăta că $A = 1$, deci avem identitatea $(x + y + z)(yz + zx + xy) - xyz = (x + y)(y + z)(z + x)$. Pentru ca să avem $\log_a x + \log_b x + \log_c x = \log_{abc} x$, trebuie ca să avem $\frac{1}{\log_x a} +$

$+\frac{1}{\log_x b} + \frac{1}{\log_x c} - \frac{1}{\log_x abc} = 0$, sau $(\log_x a + \log_x b + \log_x c)(\log_x a \log_x b + \log_x b \log_x c + \log_x c \log_x a) - \log_x a \log_x b \log_x c = 0$. Ținînd seama de identitatea obținută deducem $\log_x ab \log_x bc \log_x ca = 0$, deci condiția cerută este $ab = 1$. ● 91. În partea întâia a identității toți termenii cu litere cu indicii i și k sînt $a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2a_i a_k b_i b_k = (a_i b_k - a_k b_i)^2$. A doua identitate are loc dacă și numai dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. ● 94. Inducție completă.

● 95. Inducție completă. ● 96. Inducție completă. ● 97. Suma din partea întâia $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2$ se poate calcula observînd că $2^2 + 4^2 + \dots + (2m)^2 = 2^2 \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$. Tre-

buie să se distingă două cazuri, după paritatea lui n . ● 98. $\sum_{k=1}^n (4k - 3)^2 = 16 \sum_{k=1}^n k^2 - 12 \sum_{k=1}^n k + 9 \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n(16n^2 - 12n - 1)}{3}$. ● 99.

$n^2(2n^2 - 1), \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$. ● 100. $n(2n^3 + 8n^2 + 7n - 2)$. ● 101.

Inducție completă. Pentru $n=1$ identitatea este adevărată. Presupunînd că este adevărată pentru n , înmulțim peste tot cu $(1 + q^n x)$, avem $S_{n+1} = \left(1 + \frac{q^n - 1}{q - 1} x + \dots + \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})}{(q - 1)(q^2 - 1) \dots (q^n - 1)} x^n \right) \cdot (1 + q^n x)$, coeficientul lui x^k este $\frac{(q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{k-2})}{(q - 1)(q^2 - 1) \dots (q^k - 1)} [q^n - q^{k-1} + (q^k - 1)q^n] = \frac{(q^{n+1} - 1)(q^{n+1} - q) \dots (q^{n+1} - q^{k-1})}{(q - 1)(q^2 - 1) \dots (q^k - 1)}$. Cum coeficientul lui x^0 este 1, iar al lui x^{n+1} , după amplificarea cu $q^{n+1} - 1$ este $\frac{(q^{n+1} - 1)(q^{n+1} - q^2) \dots (q^{n+1} - q^n)}{(q - 1)(q^2 - 1) \dots (q^{n+1} - 1)}$, identitatea

este adevărată oricare ar fi n . ● 107. $E = -3$. ● 108. Din egalitatea dată, aducînd la numitor comun rezultă $(ab + bc + ca) \cdot (a + b + c) - abc = 0$, polinomul din partea întîia fiind simetric și omogen de gradul trei. Se constată că el este nul pentru $a = -b$, deci se divide cu $a + b$. Fiind simetric se divide și cu $a + c$ și cu $b + c$. Cum este de gradul trei, alți divizori nu mai poate avea, deci ecuația precedentă devine $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$. Egalitățile cerute sînt adevărate în oricare din ipotezele $a + b = 0$, $b + c = 0$, sau $c + a = 0$. ● 109. Avem identitatea $P(x) \equiv (4x^2 + 4\lambda x - 1)[2x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda - 1] + (4 - \lambda)x + 2$. Notînd cele două rădăcini ale ecuației de gradul doi cu x_1 și x_2 , trebuie să avem $(4 - \lambda)x_1 + 2 > 0$, $(4 - \lambda)x_2 + 2 > 0$, care pot fi înlocuite cu suma și produsul lor. Găsim $\lambda < 0$ sau $\lambda > \frac{24}{7}$.

● 110. Relația este echivalentă cu $-2 < \frac{2a - 1}{a^2 + 1} < 2$. Rezultă

$2a^2 - 2a + 3 > 0$, sau $2a^2 + 2a + 1 > 0$ relații adevărate pentru orice a . ● 111. Se înmulțește relația cu 2, se trece totul în membrul stîng. Semnul „egal” are loc dacă $a = b = c$. ● 112. Rezultă din identitatea lui Lagrange. ● 113. Inducție completă. Pentru

$n = 2$, inegalitatea este adevărată, căci dacă $a_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $a_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ avem $\sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2} \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$. Avem apoi $|a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}| \leq |a_1 + a_2 + \dots + a_n| + |a_{n+1}| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + |a_{n+1}|$.

● 114. Avem $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}} =$
 $= \frac{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots + |a_n|^2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}} |a_i| \leq |a_1| +$

$+ |a_2| + \dots + |a_n|$. Pentru $n = 2$, avem $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \leq |a_1| + |a_2|$ cu interpretarea geometrică: într-un triunghi dreptunghic cu catetele $|a_1|$ și $|a_2|$, ipotenuza este mai mică decît suma catetelor.

● 115. În prima parte se înmulțește și se împarte cu $\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$. Pentru numărătorul fracției avem $|(a_1^2 + \dots + a_n^2) - (b_1^2 + \dots + b_n^2)| \leq |a_1 - b_1||a_1 + b_1| + \dots + |a_n - b_n| \cdot$

$|a_n + b_n|$ și inegalitatea rezultă căci $\frac{|a_k + b_k|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}} \leq$

$\leq \frac{|a_k + b_k|}{|a_k| + |b_k|} \leq 1$. Egalitatea are loc numai dacă toate numerele a și b sînt nule.

● 116. Dem. 1. Rezultă din identitatea lui Lagrange $\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2$, căci în partea a doua avem o sumă de pătrate. Egalitatea are loc numai dacă aceste pătrate sînt toate nule, deci dacă $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. Dem. 2. Să conside-

răm polinomul de gradul doi în x , $\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2$, adică $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2$. El fiind o sumă de pătrate este mereu pozitiv, deci trebuie să avem $\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) < 0$. Egalitatea are loc cînd cele două șiruri de numere sînt proporționale, caz cînd toate pătratele se pot simultan anula. ● 117. Utilizînd neegalitățile referitoare la valoarea absolută a unei sume și apoi

$$\begin{aligned} \text{cea a lui Cauchy—Buniakowski, avem } \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n b_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n |a_i| |b_i| \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 + \\ &+ \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \left[\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right]^2, \text{ de unde re-} \end{aligned}$$

zultă neegalitatea. Egalitatea are loc numai dacă numerele a_i și b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sînt proporționale. Pentru $n = 2$ avem următoarea interpretare geometrică: în triunghiul cu vîrfurile în $O(0, 0)$, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, suma a două laturi este mai mare decît a treia (AB). ● 118. Inducție completă. Pentru $n = 1$ este adevărată. Înmulțind relația $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ cu expresia pozitivă $1 + x$, avem $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x$. *Observație.* Avem următoarele generalizări: $(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x$, dacă $\alpha > 1$ sau $\alpha < 0$, $(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x$, dacă $0 < \alpha < 1$. Demonstrația se face utilizînd formula lui Taylor cu rest de

$$\text{gradul al doilea } f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(c), \quad 0 < c < x.$$

● 119. Cum inegalitatea este adevărată pentru $n = 2$, să arătăm că ea se menține cînd înlocuim pe n cu $n + 1$. Avem succesiv

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2} >$$

$$> -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} = 0.$$

● 120. Să demonstrăm întâi inegalitatea $G_n(x) \leq A_n(x)$. Dintre marele număr de demonstrații alegem una datorită lui Liouville interesantă prin combinarea inducției complete cu studiul funcțiilor. Inegalitatea este adevărată pentru $n = 2$, căci avem $\frac{x_1 + x_2}{2} =$

$$= \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2}{2} + \sqrt{x_1 x_2} \geq \sqrt{x_1 x_2}, \text{ egalitatea avînd loc dacă } x_1 =$$

$$= x_2. \text{ Presupunem că are loc inegalitatea } \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq$$

$\geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, egalitatea avînd loc dacă $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Pentru a arăta că inegalitatea este adevărată cînd avem $n + 1$ numere

pozitive, considerînd funcția $y(x_{n+1}) = \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} -$

$- x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}$, va fi suficient să arătăm că această funcție de x_{n+1} este totdeauna pozitivă sau nulă, ultimul caz avînd loc cînd toate numerele x_i sînt egale. Derivata acestei funcții $y'(x_{n+1}) =$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}}{n+1} \right)^n - x_1 x_2 \dots x_n \text{ este o funcție crescă-}$$

toare de x_{n+1} , care se anulează pentru $x_{n+1} = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + (n+1) \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ (această valoare este egală cu x_1 , cînd $x_1 = x_2 = \dots = x_n$). Funcția y descrește pînă la această valoare și apoi crește, deci ea are un minim egal cu $n x_1 x_2 \dots x_n \cdot$

$$\cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \right), \text{ valoare care, pe baza}$$

ipotezei, este pozitivă, sau nulă. Avem deci $y \geq 0$. Pentru egalitate, minimul trebuie să fie nul, ceea ce se întîmplă cînd $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, dar atunci x_{n+1} trebuie să fie egal și el cu x_1 . În felul acesta demonstrația este terminată. Pentru a dovedi relația dintre mediile armonice și geometrică, considerăm numerele pozitive

$a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}$, pentru care scriem inegalitatea precedentă

$$\left(\frac{1}{a_1} \dots \frac{1}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}, \text{ egalitatea avînd loc cînd}$$

$\frac{1}{a_1} = \dots = \frac{1}{a_n}$, deci $a_1 = \dots = a_n$. Rezultă de aici

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq (a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}. \text{ Pentru a dovedi ultimele două inega-}$$

lități, să presupunem că numerele $x_1, \dots, x_n$ sînt ordonate crescător, deci $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, deci $\min \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_1$,

$\max \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = x_n$. Avem atunci $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq$

$$\leq \frac{nx_n}{n} = x_n, \quad \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \geq \frac{n}{n \frac{1}{x_1}} = x_1. \bullet 121. S_n =$$

$$= \frac{2x - n - 1}{2x} n. \text{ Dacă } \frac{1}{x} \text{ este al } n\text{-lea termen al progresiei,}$$

atunci $x = n + 1$ și $S_n = \frac{n}{2}$. $\bullet 122$. Conform ipotezei, avem

$$\frac{2a_1 + (m-1)r}{2a_1 + (n-1)r} = \frac{m}{n}, \text{ de unde } r = 2a_1 \text{ și apoi } \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_1(2m-1)}{a_1(2n-1)} = \frac{2m-1}{2n-1}. \bullet 123. \text{ Trebuie să avem } \alpha = k(k+2) \text{ și apoi } r = 2a_1,$$

și progresia este $a_1, 3a_1, 5a_1, \dots$. $\bullet 124. 5; 320$.

$\bullet 125$. Notînd cu r rația progresiei, avem $b = rc$, $a = r^2c$, deci $\frac{1}{3} \leq \frac{r^2x^2 + rx + 1}{r^2x^2 - rx + 1} \leq 3$. Dubla inegalitate este adevărată pentru

orice x , căci numitorul nu are rădăcini reale și se ajunge fie la $(rx + 1)^2 \geq 0$, fie la $(rx - 1)^2 \geq 0$. $\bullet 126$. Trebuie arătat că avem $(1 + x + \dots + x^n)^2 - x^n = (1 + x + \dots + x^{n+1})(1 + x + \dots + x^{n-1})$ ceea ce se verifică ușor, căci în paranteze avem sume

de termeni ai unor progresii geometrice. $\bullet 127. \underbrace{11 \dots 1}_{k \text{ ori}} = \frac{10^k - 1}{9},$

$$S = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{81}. \bullet 128. \text{ Suma primilor } n + 1 \text{ termeni din}$$

partea a doua este $\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, deci $\lambda = \frac{1}{1 - x}$. $\bullet 129. R(x) =$

$$= \frac{x^{n-k} + 1}{x - 1}. \bullet 130. 2, 4, 8, 12; \frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}. \bullet 131. \text{ Pri-}$$

mul, al patrulea și ultimul sînt 24 ; $24 + 3r$; $24 + 10r$ și trebuie să avem $(24 + 3r)^2 = 24(24 + 10r)$, deci $r_1 = 0$ și $r_2 = \frac{32}{3}$. În cazul al doilea termenii sînt 24 ; $\frac{104}{3}$; $\frac{136}{3}$; 56 ; $\frac{200}{3}$; $\frac{232}{3}$; 88 ; $\frac{296}{3}$; $\frac{328}{3}$; 120 ; $\frac{392}{3}$. Rația progresiei geometrice este $\frac{7}{3}$.

● 132. Trebuie să avem $y = \frac{x+z}{2}$ și $y^2 = xz$ de unde $x = y = z$.

● 133. Notînd $\div a, aq, aq^2, \dots$, avem $2aq^n = aq^{n+1}(1 + q + q^2 + \dots)$, deci $q = \frac{2}{3}$. Se găsește apoi $a = 81$ și progresia este $\div 81$,

$54, 36, 24, 16, \dots$ ● 134. Avem $3^{\frac{1}{2}} 5^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{1}{8}} 5^{\frac{1}{16}} \dots =$

$$= 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2n+1}} + \dots} 5^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots} = 3^{\frac{2}{3}} 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{45}.$$

Cap. II. Analiza combinatorie

- 1. 1°. C_n^2 . 2°. C_n^3 . ● 3°. Dreptele care trec prin patru puncte A, B, C, D, de pe cerc se mai intersectează în alte trei puncte (fig.S.2.1). Avem deci $3C_n^4$ puncte în afara celor date. ● 2. 1°. $P_5 = 120$; 2°. $P_4(2 + 3 + 4 + 5 + 6)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) = 3\,111\,080$; 3°. Cele care încep cu 2 și 3, în număr de 2. $P_4 = 48$, și numerele 42356, 42365 sînt înaintea numărului dat. Deci el este al 51-lea număr. ● 3. Fiecare număr este format de o permutare a celor 5 cifre 1, 2, 3, 4, 5. Sînt deci $5! = 120$ astfel de numere.

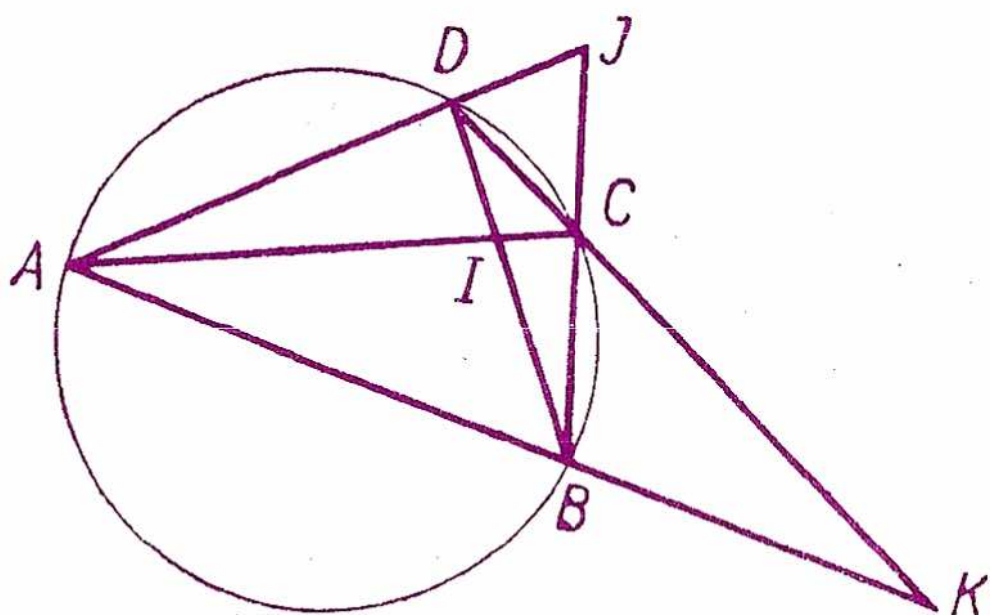


Fig. S.2.1.

Fiecare cifră figurează de $\frac{120}{5} = 24$ ori în ordinul unităților, zecilor,

sutelor, miilor, zecilor de mii, astfel că suma cifrelor unui ordin este $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 24 = 15 \cdot 24 = 360$, $S_1 = 360(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4) = 360 \cdot 11111 = 3\,999\,960$. Pătratul numărului $10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e$ este $10^8a^2 + 10^6b^2 + 10^4c^2 + 10^2d^2 + e^2 + 2[10^7ab + 10^6ac + 10^5(ad + bc) + 10^4(ae + bd) + 10^3(be + cd) + 10^2ce + 10de]$. Suma pătratelor este deci $S_2 = (10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 1) \sum a^2 + 2[10^7 + 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 10^2 + 10] \sum ab$, $\sum a^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) \cdot 24 = 55 \cdot 24$, $\sum ab = 12(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 + 12 + 15 + 20) = 12 \cdot 85$, $S_2 = 120[(11 \cdot 101010101) + (17 \cdot 11222110)] = 120(1111111111 + 190775870) = 120 \cdot 1301886981 = 156\,226\,437\,720$.

- 4. 1°. $\frac{P_7}{P_3 \cdot P_2} = 420$. 2°. $\frac{P_6}{P_3 P_2} (2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5) \cdot (10^6 + 10^5 + \dots + 1) = 1\,399\,999\,860$. 3°. Toate care încep cu 2 și cu 3, $\frac{P_6}{P_2 P_2} + \frac{P_6}{P_3} = 300$. Toate care încep cu 42, $\frac{P_5}{P_2 P_2} = 30$.

Toate care încep cu 432 și 433, $\frac{P_4}{P_2} + \frac{P_4}{P_3} = 16$. Deci numărul este

al 347-lea. ● 5. Formula este adevărată pentru $n = 2$, când $I_2 = 1$, căci cele două permutări ale primelor două numere naturale 12, 21, au o singură inversiune. Presupunem că cele $P_n = n!$ permutări ale primelor n numere naturale au $I_n = \frac{1}{2} P_n C_n^2$ inversi-

uni. Pentru a obține permutările primelor $n + 1$ numere naturale, la fiecare permutare a primelor n numere, adăugăm al $n + 1$ număr natural în toate pozițiile posibile, care sînt în număr de $n + 1$. În felul acesta fiecare din permutările primelor n numere naturale a fost scrisă de $n + 1$ ori și apoi i s-a adăugat al $n + 1$ -lea număr. Rezultă că în noile permutări, primele n numere naturale au $(n + 1)I_n$ inversiuni. Cum al $n + 1$ -lea număr natural este de P_n ori pe primul loc și provoacă n inversiuni, de P_n ori pe al doilea loc de unde provoacă $(n - 1)$ inversiuni etc., de P_n ori pe ultimul loc unde nu provoacă nici o inversiune, al $n + 1$ -lea număr produce $P_n[n + (n - 1) + \dots + 1 + 0] = P_n \frac{n(n + 1)}{2}$

inversiuni. Avem deci $I_{n+1} = (n + 1)I_n + P_n \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{1}{2} P_{n+1} C_{n+1}^2$

și proprietatea este dovedită. ● 6. $P_n(x) = x^n + C_n^2 x^{n-2} a^2 + C_n^4 x^{n-4} a^4 + \dots$. Avem $2^n = (1 + 1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots$, $0 = (1 - 1)^n = 1 - C_n^1 + C_n^2 - \dots$, deci $1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$.

Punînd $a = \sqrt{x^2 - 1}$, avem (1) $Q_n(x) = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n +$

$+(x - \sqrt{x^2 - 1})^n] = x^n + C_n^2 x^{n-2} (x^2 - 1) + \dots + C_n^{2k} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k + \dots$

Cum suma coeficienților dezvoltării binomului $(x^2 - 1)^{2k}$ este zero, rezultă că suma coeficienților polinomului $Q_n(x)$ este egală cu unitatea. Pentru a găsi rădăcinile polinomului $Q_n(x)$ notăm $x = \cos t$.

Avem (2) $Q_n(x) = \frac{1}{2} [(\cos t + i \sin t)^n + (\cos t - i \sin t)^n] =$

$= \frac{1}{2} [\cos nt + i \sin nt + \cos nt - i \sin nt] = \cos nt$, deci (3) $Q_n(x) =$

$= \cos(n \arccos x)$. Polinoamele $Q_n(x)$ definite prin expresia dezvoltată (1), sau prin (3), pentru $|x| < 1$, se numesc polinoamele lui Cebîșev și intervin foarte des în multe probleme teoretice și aplicative. Rădăcinile polinomului $Q_n(x)$ sînt date de $n \arccos x_k =$

$$= \frac{2k+1}{2} \pi \text{ deci } x_k = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi, k = 0, 1, \dots, n-1, \text{ căci se}$$

poate arăta că $x_{n+k} = x_{n-k-1}$. Cum toate rădăcinile sînt date cu ajutorul funcției cosinus, rezultă că polinomului lui Cebîșev de gradul n are toate rădăcinile reale și cuprinse în $[-1, 1]$. Cum $\cos nt + \cos (n-2)t = 2 \cos (n-1)t \cos t$, rezultă $Q_n(x) + Q_{n-2}(x) = 2Q_{n-1}(x)Q_1(x)$, dar $Q_1(x) = 1$, relație de recurență între trei polinoame Cebîșev, consecutive. Avem $Q_1(x) = x$, $Q_2(x) = 2x^2 - 1$, $Q_3(x) = 4x^3 - 3x$. ● 7. Inducție completă față de p . Pentru $p = 1$, formula este adevărată. Presupunînd că formula

$$\text{este adevărată pentru } p \text{ și observînd că } \frac{n(n+1) \dots (n+p)}{(p+1)!} +$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+p)}{p!} = \frac{n(n+1) \dots (n+p+1)}{(p+1)!} \text{ rezultă}$$

că formula este adevărată în general. Analog se procedează pentru a doua identitate. Dacă n este număr natural, identitatea se scrie

$$C_{n-1}^0 + C_n^1 + \dots + C_{n+p-1}^p = C_{n+p}^p, \text{ sau cu ajutorul combinărilor cu repetiție } \gamma_n^0 + \gamma_n^1 + \dots + \gamma_n^p = \gamma_{n+1}^p. \bullet 9. \text{ Dezvoltînd } (a+b)^n \text{ și}$$

$(b+a)^n$ după formula binomului, făcînd produsul membru cu membru al celor două egalități și egalînd coeficienții termenilor în $a^n b^n$, obținem $S = C_{2n}^n$. ● 10. Se obține egalînd coeficienții lui

$$a^n x^n \text{ din dezvoltările } (a+x)^{2n} = C_{2n}^0 a^{2n} + C_{2n}^1 a^{2n-1} x + \dots + C_{2n}^n a^n x^n + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}, (a+x)^n (a+x)^n = [C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + \dots + C_n^n x^n] [C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + \dots + C_n^n x^n]. \bullet 11. \text{ Avem } (1-i\sqrt{3})^{2p} = 1 - iC_{2p}^1 \sqrt{3} - C_{2p}^2 3 + iC_{2p}^3 3\sqrt{3} + C_{2p}^4 3^2 - \dots + (-1)^p C_{2p}^{2p} 3^p, (1+i\sqrt{3})^{2p} = 1 + iC_{2p}^1 \sqrt{3} - C_{2p}^2 3 - iC_{2p}^3 3\sqrt{3} + C_{2p}^4 3^2 - \dots + (-1)^p C_{2p}^{2p} 3^p, 2S_n = (1-i\sqrt{3})^{2p} + (1+i\sqrt{3})^{2p} =$$

$$= 2^{2p} \left[\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2p} + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2p} \right] = 2^{2p} \cdot 2 \cos \frac{2p\pi}{3}, S_{2p} =$$

$$= 2^{2p} \cos \frac{2p\pi}{3}. \text{ Analog găsim } S_{2p+1} = 2^{2p+1} \cos \frac{(2p+1)\pi}{3}.$$

● 12. $x=10$. Soluția $-\frac{5}{10}$ nu corespunde, căci x trebuie să fie număr natural. ● 13. $10C_{15}^5 + 15C_{15}^4 - 12C_{15}^3 = 15C_{15}^5$. ● 14. $n=7$;

$$x_1 = a^4, A_1 = 2; x_2 = a, A_2 = \frac{1}{2}.$$

● 15. Cîtu polinomului $P(x)/\cos^n \varphi$ cu $x^2 + 1$, este

$$1 + C_n^1 \operatorname{tg} \varphi \cdot x + (C_n^2 \operatorname{tg}^2 \varphi - 1)x^2 + \dots + (C_n^{n-2} \operatorname{tg}^{n-2} \varphi - C_n^{n-4} \operatorname{tg}^{n-4} \varphi + \dots)x^{n-2},$$

iar restul

$$(C_n^{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} \varphi - C_n^{n-3} \operatorname{tg}^{n-3} \varphi + \dots)x^{n-1} + (C_n^n \operatorname{tg}^n \varphi - C_n^{n-2} \operatorname{tg}^{n-2} \varphi + \dots)x^n.$$

Cap. III. Numere complexe

- 1. Cum $\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, rezultatul este $2^{72}(\sqrt{3}+i)$.
- 2. În paranteză avem o rădăcină cubică ε a unității, deci $\varepsilon^3=1$. Cum 60 este multiplu de 3, expresia dată este egală cu unitatea.
- 3. Pentru a dovedi această identitate putem proceda în diferite feluri: 1°. calcul direct; 2°. să ținem seama de identitatea $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ deci să arătăm că ultimul factor este nul; 3°. să considerăm egalitatea ca o ecuație de gradul trei în c , care se anulează pentru patru valori $c=a$, $c=b$, $c=2a-b$ și $c=2b-a$, deci ea este atunci o identitate.
- 4. 1°. $1+ia$ și $1-ia$ sînt conjugate, raportul lor are ca modul 1 (au același modul și argumente opuse). 2°. Toate numerele complexe de modul 1 se scriu $z=\cos\theta+i\sin\theta$. Oricare ar fi a , putem scrie $\frac{1+ia}{1-ia}=\frac{(1+ia)^2}{(1-ia)(1+ia)}=\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{2a}{1+a^2}i$. Dacă punem $a=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, $\theta\in(-\pi,\pi)$, obținem forma de mai sus. 3°. Deoarece $x=-i$ nu e rădăcină, ecuația se poate scrie: $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n=i$ sau $\frac{1+ix}{1-ix}=\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)$. Dacă notăm cu θ unul din numerele $\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}$ obținem, punînd $a=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, $\frac{1+ix}{1-ix}=\frac{1+ia}{1-ia}$ ecuație care admite ca rădăcină unică pe $x=a$. Ecuația dată admite ca rădăcini n valori ale lui $a=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{k\pi}{n}\right)$. Ecuația fiind de gradul n , nu poate admite mai mult de n rădăcini în corpul numerelor complexe. În consecință, toate rădăcinile sale sînt reale.
- 5. Din formula lui Moivre avem $\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x$, $\sin 5x=5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x$, de unde $\operatorname{tg} 5x=\frac{5\operatorname{tg} x-10\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^5 x}{1-10\operatorname{tg}^2 x+5\operatorname{tg}^4 x}$. Punînd $5x=a$ și apoi

$\operatorname{tg} \frac{a}{5} = y$, avem ecuația $y^5 - 5by^4 - 10y^3 + 10by^2 + 5y - b = 0$,

care este ecuația căutată. ● 6. Avem $\cos 5x = 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x$; $\sin 5x = 16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x$. Dacă

$x = \frac{\pi}{5}$, $\sin 5x = 0$, deci $u = \sin \frac{\pi}{5}$ este o rădăcină nenulă a ecua-

ției $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$. La fel, dacă $x = \frac{\pi}{10}$, $\cos 5x = 0$, deci

$v = \cos \frac{\pi}{10}$ este de asemenea o rădăcină a acestei ecuații. Rădăcinile

pozitive și nenule ale acestei ecuații ne dau $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$;

$\cos \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$. ● 7. $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos n \frac{\pi}{4} + i \sin n \frac{\pi}{4} \right) =$

$= 1 + C_n^1 i + \dots + C_n^n i^n$; $(1-i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos n \frac{\pi}{4} - i \sin n \frac{\pi}{4} \right) =$

$= 1 - C_n^1 i + \dots + (-1)^n C_n^n i$, de unde $(\sqrt{2})^n \cos n \frac{\pi}{4} = 1 - C_n^2 +$

$+ \dots + (-1)^p C_n^{2p} + \dots$. În particular $S_{100} = -2^{50}$. ● 8. Se face

înmulțirea și apoi se utilizează formula pentru produsul a trei

numere complexe. Din egalitatea celor două expresii, obținem:

$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c - \sin b \sin c$

$\cdot \cos a - \sin c \sin a \cos b$; $\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c +$

$+ \sin b \cos c \cos a + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c$. ● 9. $S =$

$= (2a - b - c)(2b - c - a)(2c - a - b)$. ● 10. Notînd $\frac{x}{m} = \operatorname{tg} \varphi$,

avem $P_m(x) = \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^m - \left(\frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^{-m} = \frac{2i \sin m\varphi}{\cos^m \varphi}$.

Dar în baza formulei lui Moivre, avem $\sin m\varphi = \sin \varphi (C_m^1 \cos^{m-1} \varphi -$

$- C_m^3 \cos^{m-3} \varphi \sin^2 \varphi + \dots)$. Cum $\sin \varphi = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + m^2}}$; $\cos \varphi =$

$= \frac{m}{\pm \sqrt{x^2 + m^2}}$, obținem $P_m(x) = \frac{2ix}{m^m} (C_m^1 m^{m-1} - C_m^3 x^2 m^{m-3} + \dots)$.

● 11. Notînd $a = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ și $b = \operatorname{tg} \beta$, avem $|N| = |a|$;

$\arg N = \arg a + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} b$. ● 12. Se notează $x = \alpha_1 + i\beta_1$, $y =$

$= \alpha_2 + i\beta_2$. ● 13. Notînd $z = x + iy$, expresia este reală dacă

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$, deci pentru numerele complexe a căror imagini se găsesc pe cercul de centru $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ și raza $\frac{1}{2}$. (Se

excepțează punctul $(0, 1)$ căruia îi corespunde numărul complex i , pentru care expresia dată nu are sens). ● 14. Notînd $z = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avem $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$ și $z^3 = r^3 e^{3i\theta}$. Distanțele la origine ale imaginilor celor trei numere, trebuie să fie egale, deci $r = r^2 = r^3$. Rezultă $r = 0$, deci cazul banal $z = 0$, sau $r = 1$, în care $z = e^{i\theta}$, deci imaginile numerelor z , z^2 și z^3 sînt situate pe cercul cu centrul în origine și raza unitate, argumentele lor fiind θ , 2θ și 3θ . Există o infinitate de soluții. ● 15. Trebuie să avem $\frac{z + z^2 + z^3}{3} = 0$, deci afară de soluția banală z , rezultă $1 + z + z^2 =$

$= 0$, deci $z = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. În ambele cazuri se obține triunghiul echilateral înscris în cercul cu centrul în origine și raza unu, unul dintre vîrfuri fiind pe axa reală pozitivă. ● 16. $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 + i) =$

$= \sqrt[4]{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}} = \varepsilon \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right)$, unde ε este $1, -1, i$ și $-i$.

Cum $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$,

avem $\cos \frac{\pi}{16} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, $\sin \frac{\pi}{16} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$,

deci cele patru rădăcini sînt $\pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + i \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right)$, $\pm \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + i \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \right)$. ● 17. w este o rădăcină

primitivă cubică a unității, deci a ecuației $z^3 - 1 = 0$. Celelalte două rădăcini sînt w^2 și 1 , deci $1 + w + w^2 = 0$ (relațiile dintre rădăcini și coeficienți). Avem atunci $E = a^2 + ab(w + w^2) + b^2 = a^2 - ab + b^2$. ● 18. Rădăcinile celor două polinoame sînt rădăcinile de ordinele 99, respectiv 45, ale unității. Ele corespund în planul complex, vîrfurilor poligoanelor regulate cu 99, respectiv 45, laturi

înscrise în cercul cu centrul în origine și raza unitate, unul din vîrfuri fiind pentru ambele poligoane pe axa reală pozitivă (rădăcina $x = 1$). Rădăcinile celui mai mare divizor comun corespund vîrfurilor comune ale celor două poligoane. Argumentele rădăcinilor celor două polinoame sînt $\frac{2k\pi}{99}$, $k = 0, 1, 2, \dots, 98$, $\frac{2k_1\pi}{45}$, $k_1 = 0, 1, 2,$

$\dots, 44$. Pentru a găsi argumentele comune, trebuie să avem $\frac{k}{9 \cdot 11} = \frac{k_1}{9 \cdot 5}$ deci k trebuie să fie multiplu de 11, deci $k = 0, 11, 22, \dots,$

$\dots, 88$, iar k_1 multiplu de 5, deci $k_1 = 0, 5, 10, \dots, 40$. Cu aceste valori se obțin argumentele $\frac{2k_2\pi}{9}$, $k_2 = 0, 1, \dots, 8$ deci cele

ale rădăcinilor de ordinul 9 ale unității. Cel mai mare divizor comun căutat este $x^9 - 1$. Pentru a obține cîturile împărțirilor polinoamelor cu acest divizor comun, avem $x^{99} - 1 \equiv (x^9 - 1)(x^{90} + x^{81} + \dots + 1)$, $x^{45} - 1 \equiv (x^9 - 1)(x^{36} + x^{27} + \dots + 1)$. Polinoamele $x^{99} + 1$ și $x^{45} + 1$ se obțin din precedentele făcînd transformata în $-x$ și înmulțindu-le apoi cu -1 . Rădăcinile lor se obțin din cele ale polinoamelor $x^{99} - 1$ și $x^{45} - 1$ prin înmulțirea lor cu -1 . Cel mai mare divizor comun este deci $x^9 + 1$. ● 19. Cele două polinoame au drept rădăcini, rădăcinile de ordinul m , respectiv n , ale unității $\cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}$, $k = 1, 2, \dots, m - 1$,

$\cos \frac{2k_1\pi}{n} + i \sin \frac{2k_1\pi}{n}$, $k_1 = 1, 2, \dots, n - 1$. Pentru ca să avem o

rădăcină comună trebuie ca $\frac{2k\pi}{m} = \frac{2k_1\pi}{n}$, deci $\frac{m}{n} = \frac{k}{k_1}$. Dar cum

$k < m$ și $k_1 < n$, numerele m și n trebuie să aibă divizori comuni.

Pentru fiecare divizor comun α , avem $k = \frac{m}{\alpha}$, $k_1 = \frac{n}{\alpha}$ și polinoa-

mele au rădăcina comună $\cos \frac{2k\pi}{\alpha} + i \sin \frac{2k\pi}{\alpha}$. Pentru ca al doilea

polinom să dividă primul polinom, trebuie ca m să se dividă cu n , deci $m = \beta n$. Rădăcinile primului polinom sînt $\cos \frac{2k\pi}{\beta n} + i \sin \frac{2k\pi}{\beta n}$,

$k = 1, 2, \dots, \beta n - 1$, iar pentru al doilea polinom, ele se obțin pentru $k = \alpha, 2\alpha, \dots, (n - 1)\alpha$. ● 20. Cele două poli-

noame se pot scrie $A = \frac{1 + x^{5n}}{1 + x^n}$ și $B = \frac{1 + x^5}{1 + x}$, deci A

este divizibil cu B , pentru orice n număr natural, căci în acest caz rădăcinile unității de ordinul $5n$, conțin toate rădăcinile unității de ordinul 5. ● 21. Rădăcinile trinomului de gradul doi $\cos \theta \pm i \sin \theta$, trebuie să verifice polinomul. Obținem sistemul

$$\begin{aligned} A[\cos(n+2)\theta + i \sin(n+2)\theta] + B[\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta] &= -(\cos \theta + i \sin \theta) \cos(\alpha + \theta) + \cos \alpha \\ A[\cos(n+2)\theta - i \sin(n+2)\theta] + B[\cos(n+1)\theta - i \sin(n+1)\theta] &= \\ &= -(\cos \theta - i \sin \theta) \cos(\alpha + \theta) + \cos \alpha, \end{aligned}$$

care are soluția $A = -\cos(n\theta - \alpha)$, $B = \cos(n+1)\theta - \alpha$.

● 22. Dacă $P(x)$ se divide cu $x^2 + x + 1$, atunci $Q(x) = P(x)(x-1) = x^{3a+1} - x^{3a} + x^{3b+2} - x^{3b+1} + x^{3c+3} - x^{3c+2}$ trebuie să se dividă cu $(x^2 + x + 1)(x-1) = x^3 - 1$. Înlocuind în $Q(x)$ pe x^3 cu 1 deducem (x este o rădăcină cubică a unității) $x - 1 + x^2 - x + 1 - x^2 = 0$ și proprietatea este dovedită. ● 23. Rădăcinile ecuației $x^8 + x^4 + 1 = 0$ sînt rădăcinile de ordinul patru ale lui j și j^2 rădăcinile primitive cubice complexe ale unității. Pentru ca $x^8 + x^4 + 1$ să dividă polinomul P , este necesar și suficient ca

$$(1) \quad j^{2m} + pj^m + q = 0$$

și

$$(2) \quad pj^{2m} + j^m + q = 0.$$

Dacă $1 - p^2 \neq 0$, ecuațiile liniare (1), (2) în j^m și j^{2m} au o soluție unică rațională în p, q și reală, ceea ce pretinde $j^m = 1$. $m = 3m'$, $1 + p + q = 0$, $P = x^{24m'} - 1 + p(x^{12m'} - 1) = (x^{12m'} - 1)(x^{12m'} + p + 1)$. $P = (x^{12m'} - 1)Q = (x^8 + x^4 + 1)Q_1$ (Rămîne valabilă pentru $p = 1, q = -2$; $p = -1, q = 0$). Dacă $p = \varepsilon = \pm 1$, avem $j^{2m} + \varepsilon j^m + q = 0$. $j^{2m} + \varepsilon j^m + \varepsilon q = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1$; $j^{2m} + j^m + q = 0 \Rightarrow m = 3m' \pm 1$, $j^2 + j + q = 0$, $q = -1$. Polinoamele $P(x)$ sînt 1°. $P = x^{24m'} + px^{12m'} - p - 1$; 2°. $P = x^{24m' \pm 8} + x^{12m' \pm 4} + 1$. ● 24. $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^3 = 1$ și

$1 + j + j^2 = 0$. Apoi $x_1 = (z_1 + jz_2 + j^2z_3)^3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3j(z_1^2z_2 + z_2^2z_3 + z_3^2z_1) + 3j^2(z_1z_2^2 + z_2z_3^2 + z_3z_1^2) + 6z_1z_2z_3$, expresie ce nu se modifică dacă z_1, z_2, z_3 se permută circular în sens direct, sau în sens invers. Dacă însă se permută între ele numai două numere z , atunci obținem expresia diferită $x_2 = (z_2 + jz_1 + j^2z_3)^3 = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + 3j(z_1z_2^2 + z_2z_3^2 + z_3z_1^2) + 3j^2(z_1^2z_2 + z_2^2z_3 + z_3^2z_1) + 6z_1z_2z_3$. Ecuația de gradul doi care are ca rădăcini pe x_1 și x_2 este

$x^2 + (2a^3 - 9ab + 27c)x + (a^2 - 3b)^3 = 0$. ● 25. $x^7 = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$
 $= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, de unde rezultă cele 7 rădăcini.

● 26. $\frac{z+1}{z-1} = \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \gamma = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \gamma$, unde γ este una
din rădăcinile cubice ale unității. Rădăcinile z rezultă ușor.

● 27. Avem $x^{24} - 1 = (x^{12} - 1)(x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1) = (x^4 - 1) \cdot$
 $\cdot (x^4 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^8 + x^4 + 1) = 0$. Primul factor are rădă-
cinile $\pm 1, \pm i$. Al doilea factor are rădăcinile $\pm \frac{1}{2}(1 \pm i)$. Al treilea
factor, prin substituția $y = x^4$, ne conduce la ecuația $y^2 - y + 1 =$
 $= 0$, pentru care avem $y_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$. Apoi $x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})} =$
 $= \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i \frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} \pm i \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right) = \pm \frac{1}{4} [\sqrt{6} +$
 $+ \sqrt{2} \pm i(\sqrt{6} - \sqrt{2})] \pm [\sqrt{6} - \sqrt{2} \pm i(\sqrt{6} - \sqrt{2})]$ și alte patru rădă-
cini $x = \pm \frac{1}{4} [\sqrt{6} - \sqrt{2} \pm i(\sqrt{6} + \sqrt{2})] \pm [\sqrt{6} - \sqrt{2} \pm i(\sqrt{6} + \sqrt{2})]$.

Analog se obțin și rădăcinile ultimului factor. ● 28. Se obser-
vă că $-i$ este rădăcină. Celelalte sînt $\frac{-i \pm \sqrt{7}}{2}$. ● 29. Notînd

$\left(\frac{x+1}{x} \right)^3 = y$, avem $y^2 + y + 1 = 0$, deci $\frac{x+1}{x} =$

$= \sqrt[3]{\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}}$ și $\frac{x+1}{x} = \sqrt[3]{\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}}$. Obținem

soluțiile $x = \frac{\sin \frac{\varepsilon\pi + 3k\pi}{9} - i \cos \frac{\varepsilon\pi + 3k\pi}{9}}{2 \sin \frac{\pi + 3k\pi}{9}}$, $k = 0, 1, 2; \varepsilon = 1, 2$.

● 30. Ecuația se poate scrie $2x^n - (x+a)^n = 0$, deci $x = -\frac{a}{\varepsilon \sqrt[n]{2}}$
unde ε este oricare dintre rădăcinile cubice ale unității, iar $\sqrt[n]{2}$
este radicalul aritmetic din 2. ● 31. Dacă luăm $z = x + iy$ și

$\omega = u + iv$ sistemul devine $-(y + 2u) + i(x - 2v) = -4 + 3i$;
 $x + 2u - i(y + 2v) = 3$ de unde

$$\begin{cases} -y - 2u = -4 \\ x - 2v = 3 \\ x + 2u = 3 \\ y + 2v = 0 \end{cases}$$

$v = -1, y = 2, u = 1, x = 1, z = 1 + 2i, \omega = 1 - i$. ● 32. Rezultă imediat că $m^3 = 1$. Dacă $m = 1$, găsim $a = b = c = 0$. Dacă $m = \varepsilon$, unde ε este una dintre rădăcinile primitive, de ordinul trei,

ale unității, deci $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, obținem sistemul

$$\begin{cases} 3a + b(1 - \varepsilon) = 0 \\ 3a + 2b + c(1 - \varepsilon^2) = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

care are soluțiile $b = \frac{3a}{\varepsilon - 1}$, $c = -\frac{\varepsilon a}{\varepsilon - 1}$, așa că $P(z) = \left(z^3 + \frac{3}{\varepsilon - 1}z^2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}z\right)a$. ● 33. Dacă $f(z) = \operatorname{ch} z - 1$, aceasta se

mai poate scrie $f(z) = \cos y \operatorname{ch} x + i \sin y \operatorname{sh} x - 1$ și $f(x) = \operatorname{ch} x - 1$, $f(iy) = \operatorname{ch} iy - 1 = \cos y - 1$; atunci $|f(x + iy)| = \sqrt{(\cos y \operatorname{ch} x - 1)^2 + \sin^2 y \operatorname{sh}^2 x} =$

$$= \sqrt{\cos^2 y \operatorname{ch}^2 x - 2 \operatorname{ch} x \cos y + 1 + (1 - \cos^2 y)(\operatorname{ch}^2 x - 1)} =$$

$$= \sqrt{\cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x - 2 \operatorname{ch} x \cos y} = \operatorname{ch} x - \cos y; |f(x + iy)| =$$

$$= \operatorname{ch} x - \cos y; |f(x)| = \operatorname{ch} x - 1; |f(iy)| = 1 - \cos y; \operatorname{ch} x -$$

$$- \cos y = \operatorname{ch} x - 1 + 1 - \cos y. \text{ Dacă } f(z) = \cos z - 1, \text{ atunci}$$

$$f(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y - 1; |f(x + iy)| =$$

$$= \sqrt{(\cos x \operatorname{ch} y - 1)^2 + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \operatorname{ch} y - \cos x; f(x) = \cos x - 1,$$

$$|f(x)| = 1 - \cos x, f(iy) = \operatorname{ch} y - 1; |f(iy)| = \operatorname{ch} y - 1 \text{ deci } \operatorname{ch} y -$$

$$- \cos x = 1 - \cos x + \operatorname{ch} y - 1. \text{ ● 34. Rădăcinile polinomului}$$

sînt rădăcinile de ordinul $2n$ ale unității $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{2n} + i \sin \frac{2k\pi}{2n}$,

$k = -(n-1), -(n-2), \dots, -1, 0, 1, \dots, n$. Se vede că $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = -1$. ε_j și ε_{-j} sînt complex conjugate și factorii cores-

punzători din polinomul dat sînt: $\left(x - \cos \frac{j\pi}{n} - i \sin \frac{j\pi}{n}\right) \left(x -$

$-\cos \frac{j\pi}{n} + i \sin \frac{j\pi}{n} = x^2 - 2x \cos \frac{j\pi}{n} + 1$. Avem deci $x^{2n} - 1 =$
 $= (x^2 - 1) \prod_{j=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{j\pi}{n} + 1 \right)$, sau împărțind cu $x^2 - 1$, $x^{2n-2} +$
 $+ x^{2n-4} + \dots + 1 = \prod_{j=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{j\pi}{n} + 1 \right)$. Pentru $x = 1$, gă-
 sim $n = 2^{2(n-1)} \prod_{j=1}^{n-1} \sin^2 \frac{j\pi}{2n}$ de unde se obține identitatea cerută.

În particular, dacă $n = 2$, avem $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $\sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{2\pi}{6} =$
 $= \frac{\sqrt{3}}{4}$. ● 35. $\alpha_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, sînt rădăcinile

de ordinul n ale unității, deci rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$.
 Putem deci scrie $x^n - 1 = (x - \alpha_0)(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{n-1}) =$
 $= (-1)^n (\alpha_0 - x)(\alpha_1 - x) \dots (\alpha_{n-1} - x)$ așa că $(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x) \dots$
 $\dots (\alpha_{n-1} - x) = \frac{(-1)^n (x^n - 1)}{\alpha_0 - x} = (-1)^{n-1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$,

deci $P = \prod_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - 1) = (-1)^{n-1} n$. Pe de altă parte, avem $\alpha_k -$
 $- 1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right) = 2e^{\frac{ik\pi}{n}} \sin \frac{k\pi}{n}$, deci $P =$
 $= (2i)^{n-1} e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2i\pi}{n}} \dots e^{\frac{(n-1)i\pi}{n}} \sin \frac{\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$, sau $P =$
 $= (2i)^{n-1} e^{\frac{(n-1)i\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$. Din cele două rezultate.

obținem $\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = (-1)^{n-1} \frac{n}{(2i)^{n-1}} e^{\frac{-(n-1)i\pi}{2}}$.

Cap. IV. Ecuații și inecuații cu o singură necunoscută

- 1. -1 . • 2. $0; 0; \frac{14}{5}$. • 3. $\frac{ab}{a+b}$. • 4. $\frac{a+b+c}{3}$. • 5. $\frac{ab}{a^2-b^2}$.
- 6. $\frac{a+b+1}{a-b+1}; \frac{a-b+1}{a+b-1}$. • ~~8.~~ 1° $\Delta = [(m-2)(m^2-1)]^2$, 2°. $x_1 = \frac{m-2}{m}$, $x_2 = m(m-2)$. • 9. 1°. $x_{1,2} = \sqrt{3}$; 2°. $\alpha \in \left\{ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \cup \left\{ (-1)^k \cdot \left(-\frac{\pi}{6} \right) + k\pi \right\}$, unde $k \in \mathbf{N}$. • ~~10.~~ $x_1 = \frac{m+3}{m+2}$; $x_2 = \frac{2m-5}{m+2}$; 2°. $m = -2; m = 8$; 3°. $x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$; $x_2 = 2+3\sqrt{3}$.
- 4°. Se elimină m între suma și produsul rădăcinilor ecuației. $9(x_1+x_2)^2 - 110(x_1+x_2) + 64x_1x_2 + 121 = 0$. • 11. 1° $(m+3)z^2 + 2mz + m+1 = 0$; 2° a) $m \in \left(-\infty, -\frac{3}{4} \right)$, b) $m = -\frac{3}{4}$, c) $m = -1$. • 12. $(1+a)x^2 - 4x + 4 - a = 0$; $a_1 = -3$; $a_2 = -\frac{1}{9}$. • 13. a) $(a-2)x^2 - 2ax + a-2 = 0$. b) $a \in (-\infty, 1)$ rădăcini complexe conjugate; $a = 1$, $x_1 = x_2 < 0$; $a \in (1; 2)$ rădăcini reale distincte negative; $a = 2$ ecuație de gradul I, $x = 0$; $a \in (2, +\infty)$ rădăcini reale distincte pozitive.
- 14. 1°. $m \in (-\infty, -1]$, $x_{1,2} \in \mathbf{R}$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; $m \in (-1, 1)$, $x_{1,2} \in \mathbf{C}$; $m \in [1, \infty)$, $x_{1,2} \in \mathbf{R}$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. 2°. $y^2 + 4(3m^2 - 4)y - 4m = 0$. • 15. 1°. $(m+2)x^2 - (4+m)x + 2-m = 0$. 2°. Se elimină m între relațiile $\frac{4+m}{m+2} = x_1 + x_2$; $\frac{2-m}{m+2} = x_1x_2$ și se obține $2(x_1+x_2) - x_1x_2 - 3 = 0$. 3°. $x_1 = x_2 = 1$; $x_1 = x_2 = 3$. 4°. $\Delta \geq 0$, $P > 0$, $S > 0 \Rightarrow m \in \left[\frac{4-4\sqrt{7}}{3}; 2 \right)$. • 16. $x_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $x_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha$, $\alpha = K\pi \Rightarrow x_{1,2} \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq K\pi \Rightarrow x_{1,2} \in \mathbf{C}$.
- 17. 1°. $\pm \sqrt{2m + \frac{1}{2}} \pm \sqrt{m - \frac{1}{2}}$. 2°. $m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{1}{2} \right)$.

patru rădăcini complexe, $m = -1$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_{3,4} = \pm i\sqrt{6}$, $m = \frac{1}{2}$, două rădăcini duble $\pm \sqrt{\frac{3}{2}}$, $m \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, patru ră-

dăcini reale. 3°. $E = \frac{2m^4 + 42m^3 + 8m^2 + 6m + 2}{m^4 + 38m^3 + 3m^2 + 2m + 1}$ 4°. m verifică

una dintre ecuațiile: $m^2 + m + 1 = 0$ sau $m^2 + 3m + 1 = 0$.

● 18. 1° Eliminând parametrul m între suma și produsul rădăcinilor, avem $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 4$. 2° Rădăcinile trebuie să fie

reale, deci $m \leq 1$. Apoi $1 = \cos^2 a + \sin^2 a = 2 \frac{m^2 - 15m + 18}{(m + 3)^2}$.

Rezultă $m^2 - 36m + 27 = 0$. Singura valoare ce corespunde este $m = 18 - 3\sqrt{33}$. 3° Coeficientul lui m din ecuație este nul dacă

$x_0 = 1$. Avem $P(1, m) = 9$. ● 19. $p = 1$, $q = \frac{1}{4}$; $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$.

● 20. 1°

m	Δ	P	S	natura și semnul rădăcinilor
$\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right)$	+	-	-	$x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $ x_1 > x_2 $
$-\frac{3}{4}$	+	0	-	$x_1 = 0$, $x_2 < 0$
$\left(-\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	+	+	-	$x_1 < 0$, $x_2 < 0$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	+	-	$x_1 = x_2 < 0$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	-	+	-	$x_{1,2} \in \mathbb{C}$
$-\frac{1}{2}$	-	+	0	$x_{1,2} \in \mathbb{C}$
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	-	+	+	$x_{1,2} \in \mathbb{C}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	+	+	$x_1 = x_2 > 0$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$	+	+	+	$x_1 > 0$, $x_2 > 0$

$2^\circ. x_1 + x_2 - x_1x_2 + 1 = 0.$ $3^\circ. x_1^3 + x_2^3 = 2(1 + 2m)(16m^2 + 4m - 5).$ $4^\circ. m_1 = \frac{1 - 2\sqrt{7}}{6} \Rightarrow x_1 = 2 - \sqrt{7}; x_2 = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}, m_2 = \frac{1 + 2\sqrt{7}}{6} \Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{7}; x_2 = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}.$ $5^\circ. y^2 - 2(8m^2 + 4m - 1)y + (3 + 4m)^2 = 0.$

• 21. Se află: $x_1 + x_2 = \frac{4}{1-a}$ și $x_1x_2 = \frac{4+a}{1-a}.$ Ec. de gr. II va fi: $(1-a)x^2 - 4x + 4 + a = 0, a \neq 1.$ Condițiile vor fi: $\Delta \geq 0; (1-a) \cdot f(-1) > 0; (1-a) \cdot f(1) > 0; -1 < \frac{4}{2(1-a)}; 1 > \frac{4}{2(1-a)}.$ Toate relațiile sînt verificate pentru $a \in (0, 1).$

• 22. $m = 1; S_{\min} = 9.$ **• 23.** $1^\circ. x_1 = \operatorname{tg}^2 \alpha; x_2 = 1; 2^\circ$ a) $\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + K\pi;$ b) $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}.$

• 24. $1^\circ y = 2x - 2$ (o dreaptă); $2^\circ y = -x^2 - 3$ (parabolă); $3^\circ x = -1$ (dreaptă paralelă cu Oy).

• 25. $1^\circ m \in \left\{ \frac{11 \pm 6\sqrt{2}}{7} \right\}, x_1 = x_2; m \in \left(\frac{11 - 6\sqrt{2}}{7}, \frac{1}{2} \right) \cup \left(2, \frac{11 + 6\sqrt{2}}{7} \right)$ reale de același semn; $m \in \left(\frac{1}{2}, 2 \right)$ reale semne contrare; $m = \frac{1}{2},$ ecuația de gradul I $x = -1; m \in \left(-\infty, \frac{11 - 6\sqrt{2}}{7} \right) \cup \left(\frac{11 + 6\sqrt{2}}{7}, +\infty \right)$ rădăcini complexe conjugate. 2° a) $m = \frac{1}{5},$ b) $m = -1.$

• 26. a) $m = 1, x = 3;$ b) $m = \frac{10}{11}, x_1 = x_2 = \frac{11}{2};$ c) $m \in (1; 2);$ d) $m \in \mathbb{R}.$

• 27. a) $m \in \emptyset;$ b) $m = -\frac{9}{7};$ c) $m \in \left(-\frac{8}{9}; \frac{60 + 23\sqrt{5}}{16} \right)$

• 28. $m = \frac{4}{5}.$

• 29. Discriminantul ecuației, suma și produsul rădăcinilor sînt date de $\Delta = -2m + 7, S = -\frac{2(m-2)}{m-3}, P = \frac{m+1}{m-3}.$

1° Pentru valorile lui m din diferite intervale, avem urmă-

toarea situație: $m \in (-\infty, -1)$, două rădăcini negative; $m = -1$, o rădăcină nulă și una negativă; $m \in (-1, 2)$, rădăcini de semne contrarii cea negativă mai mare în valoare absolută; $m = 2$, două rădăcini opuse; $m \in (2, 3)$ rădăcini de semne contrarii, cea pozitivă mai mare în valoare absolută; $m = 3$, o rădăcină egală cu -2 și una la infinit; $m \in \left(3, \frac{7}{2}\right)$, două rădăcini negative

diferite; $m = \frac{7}{2}$, o rădăcină dublă negativă; $m \in \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$, rădăcini complex conjugate. 2° Cum $af(1) = (m-3)(4m-6)$, unde a este coeficientul lui x^2 , rezultă că dacă $m \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$, numărul 1 este cuprins între rădăcini, și exterior rădăcinilor dacă $m \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(3, \frac{7}{2}\right)$. Numărul 1 este mai mare decât cele două rădăcini, căci avem $1 > -\frac{b}{2a}$ (b este coeficientul lui x din ecuație).

În adevăr din $1 > -\frac{2m-4}{2m-6}$ rezultă $m \in \left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

● 30. Rădăcinile ecuației sînt reale, dacă $m < \frac{13}{12}$. Cum $(m-1)f(-2) = (m-1)(m+3)$ și $(m-1)f(1) = (m-1)(4m-3)$, rezultă că dacă $m \in (-\infty, -3)$, $-2 < x_1 < x_2 < 1$; dacă $m \in \left(-3, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $x_1 < -2 < x_2 < 1$; dacă $m \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$, $x_1 < -2 < 1 < x_2$; dacă $m \in \left(1, \frac{13}{12}\right)$, $-2 < 1 < x_1 < x_2$. ● 31. Ecuația

are rădăcini reale dacă $K \in (-\infty, -10) \cup (3, +\infty)$. Nu se poate ca numărul 2 să fie mai mic decât ambele rădăcini, însă pentru $K \in (-\infty, -22) \cup (15, +\infty)$ numărul 2 este între rădăcini.

● 32. $m \in \left(-\infty, -\frac{13}{3}\right)$. ● 33. $K \in \emptyset$. ● 34. $m \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{3}{16}\right) \cup \left(\frac{15}{4}; +\infty\right)$. ● 35. $m \in (-\infty, -2)$; $x_1 < 2 < 3 < x_2$.

$m \in (-2, 0)$; $x_1 < 2 < x_2 < 3$. $m \in (1, 2)$; $2 < x_1 < 3 < x_2$. $m \in (2, 4)$; $x_1 < x_2 < 2 < 3$. ● 36. $m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$, $-\frac{1}{2} <$

$$< x_1 < x_2 < 1; m \in \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, 3); x_1 < -\frac{1}{2} < x_2 < 1.$$

$$m \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right), x_1 < -\frac{1}{2} < 1 < x_2. m \in (3, +\infty), -\frac{1}{2} < x_1 <$$

$$< 1 < x_2. \bullet 37. \text{ Trebuie să avem } p^2 - 4q > 0 \text{ și apoi } 1^\circ q > 0, 1 + p + q < 0; 2^\circ q > 0, -2 < p < 0; 3^\circ q < 0, 1 + p +$$

$$+ q < 0. \bullet 38. m \in \left(\frac{4}{5}; 2\right). \bullet 39. m \in (2 - \sqrt{10}, -1) \cup$$

$$\cup (-1, 1) \cup (1, 2 + \sqrt{10}). \bullet 40. \text{ Ecuația are rădăcini reale dacă}$$

$$m \in \left(\frac{11 - 6\sqrt{2}}{7}, \frac{11 + 6\sqrt{2}}{7}\right). 1^\circ. x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 1; 2^\circ. \text{ aceeași}$$

$$\text{ecuație}; 3^\circ. \text{ o rădăcină în } (-1, 1) \text{ dacă } \frac{1}{2} < m < 2 \text{ și am-}$$

$$\text{bele rădăcini în același interval, dacă } 2 < m < \frac{11 + 6\sqrt{2}}{7}.$$

$$\bullet 41. \text{ Pentru } m \geq 0, \text{ rădăcinile ecuației sînt reale. Cum pro-} \\ \text{dusul rădăcinilor este negativ și cum } F(0) = -m < 0, F(1) =$$

$$= 4m^2 + 13m + 12 > 0, \text{ proprietatea este dovedită. } \bullet 42. \text{ Avem}$$

$$z_{1,2} = e^{it} \pm \sqrt{\cos 2t - 1 + i \sin 2t}. \text{ Dacă } \sin t \geq 0, \text{ deci } 0 \leq t \leq \pi,$$

$$\text{avem } z_{1,2} = \cos t + i \sin t \pm \sqrt{\sin t} (\sqrt{1 - \sin t} + i \sqrt{1 + \sin t}), \text{ căci}$$

$$\sqrt{-\sin t + i \cos t} = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin t}{2}} \pm i \sqrt{\frac{1 + \sin t}{2}}. \text{ Dacă } \sin t < 0,$$

$$\text{deci } \pi < t \leq 2\pi, \text{ avem } z_{1,2} = \cos t + i \sin t \pm \sqrt{-\sin t} (\sqrt{1 + \sin t} -$$

$$- i \sqrt{1 - \sin t}). \bullet 43. \text{ Se notează } x^3 - 3x - 1 = y. 0; \pm \sqrt{3}; -2;$$

$$1; 1. \bullet 44. 1; a; ia. \bullet 45. \pm \left(\sin \frac{\varphi}{2} \pm i \cos \frac{\varphi}{2}\right). \bullet 46. \pm \sqrt{2 + 3i},$$

$$\pm \sqrt{-1 - i}. \bullet 47. \pm \sqrt{a + b}; \pm \sqrt{\frac{ab}{a + b}}. \bullet 48. \text{ Notînd } z =$$

$$= (x + 1)^3, \text{ găsim } (x + 1)^3 = 5 \text{ și } (x + 1)^3 = 4 \text{ și cele 6 rădăcini}$$

$$\text{ale ecuației sînt } -1 + \sqrt[3]{5}, (-1 + \sqrt[3]{5}) \frac{-1 \pm i \sqrt{3}}{2}, -i + \sqrt[3]{4},$$

$$(-1 + \sqrt[3]{4}) \frac{-1 \pm i \sqrt{3}}{2}. \bullet 49. \text{ Avem } (x^2 - 2x - 1)(x^4 + 2x^3 +$$

$$+ 2x^2 - 2x + 1) = 0. \text{ Prima ecuație ne dă rădăcinile } x_{1,2} = 1 \pm$$

$$\pm \sqrt{2}. \text{ A doua se rezolvă analog cu ecuațiile reciproce, punînd}$$

$$x - \frac{1}{x} = y. \bullet 50. \text{ Notînd } z^3 = y, \text{ avem } y = \cos \theta \pm i \sin \theta.$$

Rădăcinile ecuației în z se obțin din acestea înmulțind cu 1, ε și ε^2 , unde ε este o rădăcină primitivă cubică a unității. ● 51.

$\pm 1; 3; \frac{1}{3}; 5; \frac{1}{5}$. ● 52. Notînd $x + \frac{1}{x} = y$, se ajunge la ecuația $y^2(y + 1)^2 = 0$ și apoi la $(x^2 + 1)^2(x^2 + x + 1)^2 = 0$. $\pm i, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, toate duble. ● 53. $\frac{a}{b}; \frac{b}{a}; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

● 54. Se împarte ecuația cu x^2 , se grupează termenii și se face substituția $x + \frac{ab}{x} = y$. Se găsește $x_1 = x_2 = a; x_3 = x_4 = b$. ● 55. Cum

trinomialul $24x^2 - 42x - 77$ este pozitiv pentru $x > 10$, iar transformată în $-x$, este pozitivă pentru $x > 2$, o limită superioară a rădăcinilor pozitive este 10, iar o limită inferioară a rădăcinilor negative este -3 , divizorii termenului liber care trebuiesc încercați sînt $\pm 2, \pm 3, 4, 5, 6$ și 10. Cum $f(1) = 21, f(-1) = -7$, niciunul dintre divizori nu poate fi rădăcină întreagă a ecuației. Din cauză că al doilea termen din ecuație are un coeficient par, facem substituția

$x = \frac{y}{12}$ (în loc de $x = \frac{y}{24}$) și avem ecuația $F(y) = y^4 - 21y^3 - 462y^2 + 4032y + 51840 = 0$. O limită superioară a rădăcinilor acestei ecuații este 40, iar limita inferioară este -40 . Utilizînd o tabelă de numere prime, avem $51 \cdot 840 = 2^5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29, F(1) = 55 \cdot 390 = 2 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 191, F(-1) = 47 \cdot 368 = 2^3 \cdot 31 \cdot 191$. Utilizînd același criteriu de eliminare a unor divizori ai termenului liber, rămîn ca să fie încercați numai divizorii 30 și -9 , care se dovedesc a fi rădăcini ale ecuației în y , celelalte două fiind $\pm 8\sqrt{3}$.

Atunci ecuația dată are rădăcinile $\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. ● 56. Pentru

a găsi rădăcinile raționale ale ecuației, este convenabil de a face schimbarea $x = \frac{1}{y}$. Obținem ecuația $y^4 - 17y^3 + 101y^2 - 247y + 210 = 0$, care are rădăcinile întregi 2, 3, 5 și 7, așa că ecuația dată are rădăcinile $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ și $\frac{1}{7}$. ● 57. Avem $x^{12} - 1 = (x - 1) \cdot$

$(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^6 + 1) = 0$. Rădăcinile ecuației sînt $1; -1; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12}\right) \cdot$

$\left(\cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6}\right), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. ● 58. Analog cu teoria

rădăcinilor întregi pentru o ecuație cu coeficienți întregi (și reali), ecuația precedentă poate avea rădăcinile complexe $\pm(3+i)$. Avem în adevăr $f(x) = (x^3 - x^2 + 2x - 1)(x + 3 + i)$. Se constată apoi că trinomialul $x^3 - x^2 + 2x - 1$ are o singură rădăcină reală irațională cuprinsă în intervalul $(0, 1)$ și două rădăcini complexe care au atât părțile reale cât și cele imaginare iraționale. ● 59. Ecuația este reciprocă, deci punând $x + \frac{1}{x} = y$, găsim ecuația (1) $y^2 + ay - 2 = 0$,

care are totdeauna rădăcini reale, căci discriminantul ei este $a^2 + 8$. Discriminantul ecuației în x , (2) $x^2 - yx + 1 = 0$, este $y^2 - 4$. Deci rădăcinile ecuației (2) sînt complexe, dacă rădăcinile ecuației (1) sînt cuprinse în $(-2, 2)$. Cum valorile polinomului $y^2 + ay - 2$, pentru $-2, 0$ și 2 sînt $2 - 2a, -2$ și $2 + 2a$, trebuie ca $2 - 2a > 0$ și $2 + 2a > 0$, deci $-1 < a < 1$. Dacă $a = 1$ sau $a = -1$ ecuația dată are două rădăcini complexe și o rădăcină reală dublă. Dacă $a \in \mathbb{R} - [-2, 2]$, avem toate rădăcinile reale.

● 60. Se împarte cu $x^2 - 2x + 2$ și se obține $\lambda = -10$; $\mu = 18$.

● 61. $x_1 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$, $x_{2,3} = \frac{-(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) \pm \sqrt{3(4 - 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})}}{2}$.

● 62. $2x = (a \pm \sqrt{a^2 - 1})^{\frac{1}{3}} + (a \pm \sqrt{a^2 - 1})^{-\frac{1}{3}}$, care este singura rădăcină reală mai mare decît unitatea, căci $\text{ch } t \geq 1$. ● 63. 1; 2; 3; 4; 5; 6. Punctele sînt coliniare, căci

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_4 & 1 \\ x_5 & x_6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

● 64. Dacă o ecuație de gradul doi are rădăcinile a și b , ea se poate scrie $x^2 - (a + b)x + ab = 0$, sau cu condiția dată $x^2 - (a + b)x + 2(a + b) + m = 0$. Notînd suma a cîte două rădăcini cu α, β și γ , trebuie să avem $x^6 + 10mx^3 + 12m(m - 2)x + m(m^2 - 12m + 16) \equiv (x^2 - \alpha x + 2\alpha + m)(x^2 - \beta x + 2\beta + m)(x^2 - \gamma x + 2\gamma + m)$. Identificînd coeficienții lui x^5, x^4 și x^3 , găsim $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = -3m$, $\alpha\beta\gamma = 2m$, deci sumele a cîte două rădăcini sînt date de rădăcinile ecuației $z^3 - 3mz - 2m = 0$. Ținînd seama de relațiile precedente, relațiile obținute prin identificarea coeficienților lui x^2, x^1 și x^0 sînt verificate, ceea ce dovedește afirmația făcută referitor la gruparea rădăcinilor. ● 65. Polinomul din prima parte este format cu termeni din doi în doi ai dezvoltării

binomiale $(x + \sqrt{x^2 - 1})^{2n}$. Ecuația se poate atunci scrie $\frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2 - 1})^{2n} + (x - \sqrt{x^2 - 1})^{2n}] = 0$, sau notînd $x = \cos t$, $\frac{1}{2}(\cos t + i \sin t)^{2n} + \frac{1}{2}(\cos t - i \sin t)^{2n} = 0$ deci, cu ajutorul formulei lui Moivre, $\cos 2n t = 0$, sau în fine $\cos(2n \arccos x) = 0$ care are $2n$ rădăcini reale distincte $x_k = \cos \frac{2k + 1}{4n} \pi$, $k = 1, 2, \dots, 2n$.

Polinomul din prima parte a ecuației date este *polinomul lui Cebîșev* de gradul $2n$. ● 66. Ecuația $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ are rădăcinile a și b , deci trebuie să avem $-\frac{2(m-2)}{m+1} = a + b$ și $\frac{m+4}{m+1} = ab$. Eliminînd parametrul m , se obține relația $2a = a + b + 4$.

Pe de altă parte avem $m = \frac{4 - ab}{ab - 1}$. ● 67. Notînd cu α partea

reală a rădăcinilor, avem $x_1 = \alpha(1 + i)$, $x_2 = \alpha(1 - i)$. Deci $-\frac{b}{a} = 2\alpha$ și $\frac{c}{a} = 2\alpha^2$ așa că trebuie să avem $b^2 - 2ac = 0$.

● 68. Notînd cu x suma mezilor z_1, z_2 , aceștia sînt rădăcinile ecuației $z^2 - 2sz + x = 0$, deci $z_1 = s + \sqrt{s^2 - x}$, $z_2 = s - \sqrt{s^2 - x}$. Cum suma extremilor z'_1, z'_2 este egală cu suma x a mezilor, avem $z'_1 = s' + \sqrt{s'^2 - x}$, $z'_2 = s' - \sqrt{s'^2 - x}$. Din suma pătratelor termenilor $4s^2 + 4s'^2 - 4x = 4q^2$, rezultă x , așa că cei patru termeni sînt în ordine $s' + \sqrt{q^2 - s^2}$, $s + \sqrt{q^2 - s'^2}$, $s - \sqrt{q^2 - s'^2}$, $s' - \sqrt{q^2 - s^2}$. Pentru ca termenii să fie reali și nenuli, trebuie ca $s^2 < q^2$, $s'^2 < q^2$. ● 69. Să presupunem că rădăcinile ecuației au argumentul α , deci $z = r e^{i\alpha}$ ($r > 0$). Fie $z_1 = r_1 e^{i\alpha}$ și $z_2 = r_2 e^{i\alpha}$ ($r_1, r_2 > 0$) rădăcinile ei. Avem $z_1 + z_2 = (r_1 + r_2)e^{i\alpha} = \omega_1 e^{i\alpha} = -(a + ib)$, $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{2i\alpha} = \omega_2 e^{2i\alpha} = c + id$. Ecuația devine $r^2 - 2\omega_1 r + \omega_2 = 0$ și ea trebuie să aibă două rădăcini reale (și pozitive), deci $\omega_1^2 - \omega_2 > 0$, astfel condiția cerută, între modulele numerelor complexe $a + ib$, $c + id$, care au același argument, este $|a + ib|^2 - |c + id| > 0$. ● 70. Cum M_1 și M_2 sînt simetrice față de axa reală, notînd cu α partea reală a rădăcinilor complexe, avem $x_1 = \alpha + i(x_3 - \alpha)$, $x_2 = \alpha - i(x_3 - \alpha)$, $x_3 = x_3$. Ținînd seama de relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuației date, deducem $-\frac{b}{a} = 2\alpha + x_3$, $\frac{c}{a} = 2\alpha^2 + x_3^2$, $-\frac{d}{a} = 2\alpha^2 x_3 - 2\alpha x_3^2 + x_3^3$.

Scotînd pe α din prima relație și înlocuindu-l în celelalte două, rezultă că x_3 trebuie să satisfacă simultan relațiile

$$\begin{array}{l|l} 3a^2x_3^2 + 2abx_3 + b^2 - 2ac = 0 & -5x_3 \\ 5a^2x_3^2 + 4abx_3^2 + b^2x_3 + 2ad = 0 & 3 \end{array}$$

sau să satisfacă una dintre ele și o combinație a lor, deci relațiile

$$\begin{array}{l|l} 3a^2x_3^2 + 2abx_3 + b^2 - 2ac = 0 & b \\ abx_3^2 + (-b^2 + 5ac)x_3 + 3ad = 0 & -3a \end{array}$$

sau în fine relațiile

$$\begin{aligned} 3a^2x_3^2 + 2abx_3 + b^2 - 2ac &= 0 \\ (5ab^2 - 15a^2c)x_3 + b^3 - 2abc - 9a^2d &= 0. \end{aligned}$$

Scotînd pe x_3 din a doua ecuație și înlocuindu-l în prima, obținem relația căutată $3a^2(b^3 - 2abc - 9a^2d)^2 - 10a^2b(b^2 - 3ac)(b^3 - 2abc - 9a^2d) + 25a^2(b^2 - 2ac)(b^2 - 3ac)^2 = 0$. ● 71. Notînd cu x_1, x_2, x_3 , rădăcinile ecuației, trebuie să avem $x_1 = x_2x_3, x_2 = x_3x_1, x_3 = x_1x_2$. Din două asemenea relații avem $x_1x_2 = x_1x_2x_3^2$. Presupunînd rădăcinile diferite de zero, avem $x_3^2 = 1$. Analizînd toate posibilitățile găsim că ecuația este $(x - 1)^3 = 0$, sau $(x + 1)^2(x - 1) = 0$.

● 72. Noua ecuație va avea rădăcinile $z_1 = (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2, z_2 = (x_2 - x_3)^2 = x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3, z_3 = (x_3 - x_1)^2 = x_3^2 + x_1^2 - 2x_3x_1$. Găsim $z_1 + z_2 + z_3 = -6p, z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 9p^2, z_1z_2z_3 = -4p^3 - 27q^2$, deci ecuația căutată va fi $z^3 + 6pz^2 + 9p^2z + 4p^3 + 27q^2 = 0$. Dacă x_1, x_2, x_3 sînt reale și distincte, atunci $z_1z_2z_3 = (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2 = -4p^3 - 27q^2 > 0$. Dacă avem $x_1 = x_2 \neq x_3$, atunci $z_1z_2z_3 = 4p^3 + 27q^2 = 0$. Dacă $x_1 = x_2 = x_3$, trebuie ca $p = q = 0$. Dacă x_1 este real, iar $x_2 = \beta + i\gamma, x_3 = \beta - i\gamma, (\gamma \neq 0)$, unde β și γ sînt reali, avem $z_1z_2z_3 = -[(x_1 - \beta)^2 + \gamma^2]^2 4\gamma^2 = -4p^3 - 27q^2 < 0$. Prin urmare ecuația $x^3 + px + q = 0$ are rădăcini reale dacă $4p^3 + 27q^2 < 0$, una dublă dacă $4p^3 + 27q^2 = 0$ și două complexe dacă $4p^3 + 27q^2 > 0$. ● 73. ε fiind rădăcină primitivă cubică a unității, celelalte două sînt ε^2 și $\varepsilon^3 = 1$. Ele sînt rădăcini ale ecuației $x^3 - 1 = 0$, deci avem $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. Să presupunem că $P(x) =$

$$\begin{aligned} &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n). \text{ Atunci } Q(x) = \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)(\varepsilon x - \\ &- \alpha_j)(\varepsilon^2 x - \alpha_j) = \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j)(x - \varepsilon\alpha_j)(x - \varepsilon^2\alpha_j) = \prod_{j=1}^n (x^3 - \alpha_j^3). \end{aligned}$$

Prin urmare rădăcinile acestei ecuații sînt $\alpha_j, \alpha\varepsilon_j, \varepsilon^2\alpha_j$, unde

$j = 1, 2, \dots, n$. ● 74. Se ajunge la ecuația binomă $y^3 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$, care are rădăcinile $y_k = \varepsilon^k \sqrt[3]{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$, $k = 1, 2, 3$ și unde ε

este o rădăcină primitivă cubică a unității. Rădăcinile ecuației date se obțin din transformare. ● 75. Ecuația dată, devine $(-n^3 - np + q)y^3 + (3mn^2 + mp + 2np - 3q)y^2 + (-3m^2n - 2mp - np + 3q)y + m^3 + mp - q = 0$. Distingem două cazuri. 1°. Coeficienții lui y și y^2 sînt nuli. Avem: $3mn^2 + mp + 2np - 3q = 0$, $-3m^2n - 2mp - np + 3q = 0$. Înmulțind prima ecuație cu m și a doua cu n și adunîndu-le găsim: $(m-n) \cdot (mp + np - 3q) = 0$. De asemenea, adunînd cele două ecuații de mai sus găsim: $(n-m)(3mn + p) = 0$. Cum $m \neq n$, rezultă că m și n se determină din sistemul $m + n = \frac{3q}{p}$, $mn = -\frac{p}{3}$, deci

cu ajutorul unei ecuații de gradul al doilea. 2°. Celelalte posibilități ca ecuația dată să se transforme într-o ecuație binomă, cer ca m , sau n , să fie dați de ecuația $z^3 + pz - q = 0$, deci să fie egali cu opusele rădăcinilor ecuației date. Celălalt parametru rezultă dintr-o ecuație de gradul doi. ● 76. Dacă $z = x$ (real), x trebuie să anuleze atât partea reală cît și imaginară a polinomului $P(x)$, deci $2x^3 + x^2 - 6x - 3 = 0$, $-6x^2 - x + 1 = 0$. Dintre rădăcinile $-\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{3}$ ale celei de a doua ecuații numai prima verifică și prima ecuație.

Avem apoi: $P(z) = (2z + 1)(z^2 - 3iz - 3 + i)$. Pentru al doilea factor avem rădăcinile $z = \frac{3i \pm \sqrt{3-4i}}{2} = \frac{3i \pm (2-i)}{2}$ deci

$P(z) = (2z + 1)(z - 1 - i)(z + 1 - 2i)$. Cum $\overline{P}(z) = (2z + 1) \cdot (z - 1 + i)(z + 1 + 2i)$. Avem apoi $P(z)\overline{P}(z) = (2z + 1)^2(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 5)$. ● 77. Fie $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ rădăcinile reale ale ecuației $f(x) = 0$. Atunci ecuația derivată $f'(x) = 0$, are $n - 1$ rădăcini reale și distincte $y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1}$. La fel cum se procedează în șirul lui Rolle, pentru ca ecuația inițială să aibă n rădăcini reale, trebuie ca $f(-\infty)f(y_1) < 0$, $f(y_1)f(y_2) < 0$, ..., $f(y_{n-1})f(+\infty) < 0$. Dar cum $F(y_k) = f(y_k)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, rezultă că $F(-\infty)F(y_1) < 0$, $F(y_1)F(y_2) < 0$, ..., $F(y_{n-1})F(+\infty) < 0$, deci ecuația $F(x) = f(x) + \alpha f'(x) = 0$, are n rădăcini reale distincte. ● 78. Notînd $z = x + iy$, din ecuație rezultă sistemul $x^3 - 3xy^2 + ax^2 - ay^2 + 4x + a = 0$, $3x^2y - y^3 + 2axy + 4y = 0$. Dacă $y = 0$ obținem rădăcinile reale. Ele verifică

ecuația $x^3 + ax^2 + 4x + a = 0$. Cum $a > 0$, nu avem nici o variație deci ecuația nu are nici o rădăcină pozitivă (Descartes). Presupunând $y \neq 0$ și eliminând pe y^2 din sistem, avem pentru partea reală x a rădăcinilor, ecuația $8x^3 + 8ax^2 + (8 + 2a^2)x + 3a = 0$, care nu are nici o variație, deci $x \leq 0$. Pentru a doua ecuație, procedând analog găsim condiția $k \geq -a^2$. ● 79. Ecuația trebuie să aibă afară de rădăcinile α și $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ și rădăcinile

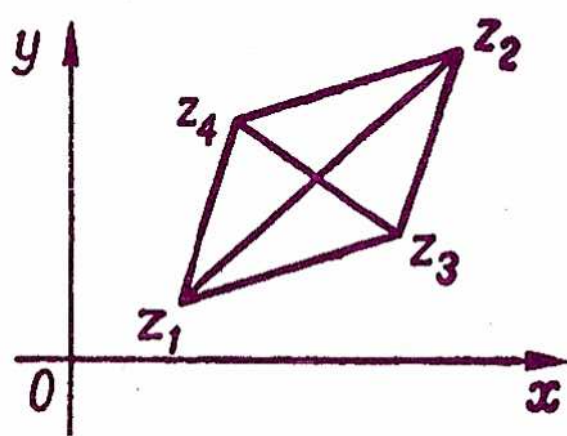


Fig. S.4.1

$$\frac{1 + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}}{1 - \frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = -\frac{1}{\alpha} \quad \text{și} \quad \frac{1 - \frac{1}{\alpha}}{1 + \frac{1}{\alpha}} = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

$$\text{Ea este } x^4 + \frac{1 - 6\alpha^2 + \alpha^4}{\alpha(1 - \alpha^2)} x^3 - 6x^2 - \frac{1 - 6\alpha^2 + \alpha^4}{\alpha(1 - \alpha^2)} x + 1 = 0.$$

● 80. Notînd cu z_1, z_2, z_3, z_4 rădăcinile ecuației, trebuie să avem $\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{z_3 + z_4}{2}$ (Fig.S.4.1). Condiția între coeficienți este $p^3 - 4pq + + 8r = 0$ (Ex. 186). ● 81. Trebuie ca $P'(z) = 0$ să aibă o rădăcină triplă, deci $P'(z) = (z - a)^3 = z^3 - 3az^2 + 3a^2z - a^3 = 0$. Rezultă atunci $P(z) = \frac{1}{4} (z^4 - 4az^3 + 6a^2z^2 - 4a^3z + 4b) = 0$,

pentru care este îndeplinită condiția ca imaginile rădăcinilor să fie vîrfurile unui paralelogram. Reciproc, dacă ecuația are forma precedentă, ecuația se poate scrie $4P(z) = (z - a)^4 + + a^4 - 4b = 0$ cu rădăcinile $z_1 = a + A, z_2 = -A, z_3 = a + + iA, z_4 = a - iA$ și se vede ușor că $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$. Întrucît termenul liber B , nu intervine decît în expresia A , se explică de ce condiția din exercițiul precedent nu conține acest termen liber. ● 82. Să presupunem că avem o funcție continuă pe toată axa reală. Se știe că între două rădăcini consecutive ale derivatei unei funcții, există cel mult o rădăcină pentru funcție. Dacă derivata are m rădăcini reale și $n - m$ rădăcini complexe, putem avea rădăcini ale funcției numai în cele $m - 1$ intervale delimitate de cele m rădăcini reale și în cele două intervale din afara acestora, deci în total cel mult $m + 1$ rădăcini reale din cele $n + 1$ rădăcini. Înseamnă că ecuația dată are cel puțin $n + 1 - m - 1 = n - m$ rădăcini

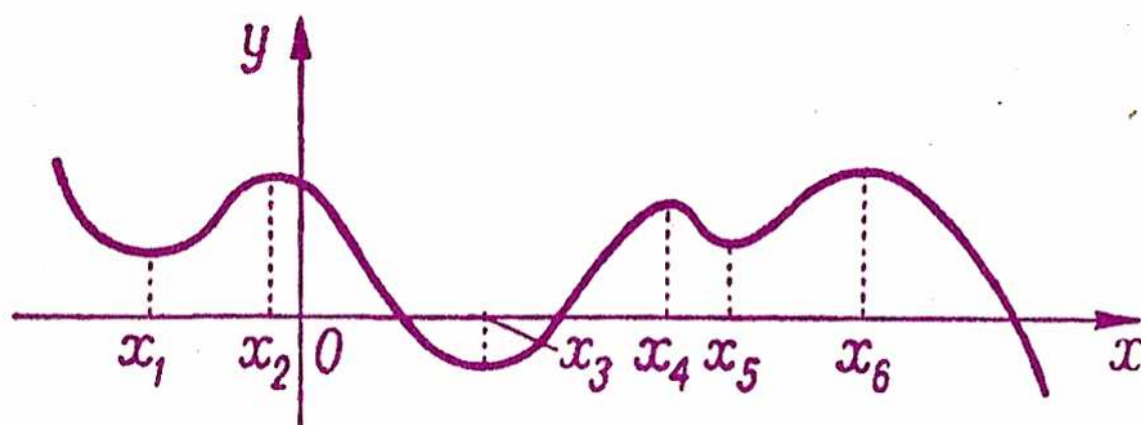


Fig. S.4.2

complexe. Astfel pentru funcția din graficul din Fig. S.4.2, funcția derivată are 6 rădăcini reale, deci funcția ar putea avea 7 rădăcini reale. Ea are de fapt numai 3 rădăcini reale, deci cu 4 rădăcini complexe mai mult

decît derivata sa. ● 83. Să presupunem că $P(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \cdot (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_r)^{\alpha_r} (x - x_{r+1}) \dots (x - x_k)$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sînt numere întregi mai mari decît unitatea. Derivata $P'(x)$ are rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_r$ de ordinele $\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_r - 1$. Prin urmare cel mai mare divizor comun între $P(x)$ și $P'(x)$ este $D(x) = (x - x_1)^{\alpha_1 - 1} (x - x_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (x - x_r)^{\alpha_r - 1}$, așa că polinomul $Q(x)$, care are aceleași rădăcini ca și $P(x)$, dar toate simple, este $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) = \frac{P(x)}{D(x)}$. Cel

mai mare divizor comun între $D(x)$ și $Q(x)$ este $D_1(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_r)$, deci polinomul $P_1(x)$ care are ca rădăcini rădăcinile simple ale lui $P(x)$ este $P_1(x) = \frac{Q(x)}{D_1(x)} = (x - x_{r+1}) \cdot$

$\cdot (x - x_{r+2}) \dots (x - x_k)$. ● 84. Notînd $x = \operatorname{tg} y$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

avem $x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}$. ● 85. Se examinează semnul fiecărui termen.

Pentru diferitele intervale, ecuația este

$$\begin{cases} -2x + 1 - x + 3x + 1 = 1, & \text{pentru } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \\ -2x + 1 - x - 3x - 1 = 1, & \text{pentru } x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \\ -2x + 1 + x - 3x - 1 = 1, & \text{pentru } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 2x - 1 + x - 3x - 1 = 1, & \text{pentru } x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right). \end{cases}$$

Prima și ultima ecuație sînt imposibile. A treia ecuație ne conduce

- la valoarea $x = -\frac{1}{4}$, situată în afara intervalului $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Singura soluție este $x = -\frac{1}{6}$, pentru $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$. ● 86. Nu avem soluții, căci suma a trei cantități nenegative este nulă, când fiecare dintre acestea este nulă. ● 87. $|x - 1| - 2|2x - 1| = 3$. Nu avem soluții. ● 88. $\frac{5}{3}$; $\frac{9}{2}$. ● 89. $\pm 1 \pm \sqrt{2}$. ● 90. 0 ; $-\frac{4}{5}$; $\frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{3}$. ● 91. 1 ; 10 . 92. 4 . ● 93. $\frac{4}{5}$; 4 . ● 94. 1 ; $\frac{5}{2}$. ● 95. 1 ; -1 ; 4 ; -4 . 96. -1 ; 0 ; 6 . ● 97. 0 ; 0 ; $\pm \sqrt{3}$. ● 98. Putem scrie $|x^2 - 2| = 2x$. Avem numai rădăcina $1 - \sqrt{3}$. ● 99. ± 2 , $\pm \frac{1}{2}$. ● 100. 0 ; $\frac{25}{16}$. ● 101. Soluțiile sînt $x = 0$ ($a \geq 0$, $b \geq 0$) și $x = -a - b$ ($a \leq 0$, $b \leq 0$). ● 102. Notînd $x = z^3$ se obține ecuația $z^3 - 13z - 12 = 0$ cu rădăcinile -1 , 4 și -3 . Prima trebuie eliminată căci anulează un numitor al ecuației. Soluțiile sînt 64 , 64ε , $64\varepsilon^2$, -27 , -27ε , $-27\varepsilon^2$, unde ε este o rădăcină primitivă cubică a unității. ● 103. Se ridică la cub și se ține seama de ecuația dată. $\frac{2a}{5}$. ● 104. 0 ; $\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. ● 105. Amplificînd fracția din prima parte cu $(\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b})^2$, avem $3\sqrt[3]{(a-x)(x-b)}[\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b}] = 0$, deci $x = a$ sau $x = b$. Ultimul factor nu se poate anula, căci este numitorul fracției din partea întâia a ecuației. ● 106. Se face substituția $z = \sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}$. Se obține $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{z^m - 1}{z^m + 1}$. ● 107. 3 , -3 . ● 108. Se poate nota $3x^2 + 5x + 1 = u$. 1 ; $-\frac{8}{3}$. ● 109. $x^2 + 17 = z^4$. $x = \pm 8$, $x = \pm i$. ● 110. Se pune $\sqrt{2x-5} = z$ (> 0) și avem $\sqrt{z^2 + 2z + 1} + \sqrt{z^2 + 6z + 9} = 14$. Rădăcinii pozitive 5 , îi corespunde $x = 15$. ● 111. Se notează $a + x = t^5$. Avem $t^5 = \frac{a}{1 - (\sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b})^5}$. ● 112. Se face substituția $\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} = t$ și se obține $t = \sqrt[4]{\frac{1+a}{1-a}}$, de unde $x = a$.

● 113. $\frac{a-b}{2}$ ● 114. $x = \frac{a}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1}$ ● 115. $2^4 5^{-\frac{1}{3}}$ ● 116. $3\sqrt{\log x} -$

$-\log x = 2$, $x_1 = 10$, $x_2 = 10^4$. ● 117. Dintre valorile 10 și 10^{-4} numai prima este rădăcină a ecuației date, căci $\lg x$ trebuie să fie pozitiv, deci $x > 1$. ● 118. 5; valoarea -4 nu corespunde.

● 119. 13; rădăcina $-\frac{7}{2}$ nu corespunde, căci trebuie ca $2x - 1 > 0$.

● 120. 2; 9. ● 121. 3. ● 122. $\frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x = 2,5$. $x_1 = 4$, $x_2 =$

$= \sqrt{2}$. ● 123. Ecuația se scrie $\frac{1}{\log_x 2^4} + \frac{1}{\log_x 2^2} + \frac{1}{\log_x 2} = 7$; $\log_x 2 =$
 $= \frac{1}{4}$; $x = 16$. Ecuația se mai putea scrie $\log_{16} x + \log_{16} x^2 +$

$+ \log_{16} x^4 = 7$, deci $\log_{16} x = 1$. ● 124. $\frac{1}{2} (\log_x 3 + 1) = (\log_x 3)^2$;

$x_1 = \frac{1}{9}$. $x_2 = 3$ nu corespunde. ● 125. Avem $\log_4(x+12) =$

$= \frac{1}{\log_x 2} = \frac{2}{2 \log_x 2} = 2 \log_4 x$, deci $x+12 = x^2$, așa că $x = 4$, căci

baza logaritmulor trebuie să fie pozitivă. ● 126. Se trece la logarit-

mii în baza a . $x_1 = a^{-\frac{1}{2}}$, $x_2 = a^{-\frac{4}{3}}$. ● 127. $1 - a^2$. ● 128. 1; ac .

● 129. Ecuația se scrie $\sqrt{\frac{1}{4}(1 + \log_a x) + \frac{1}{4}(1 + \log_x a)} +$

$+ \sqrt{\frac{1}{4}(\log_a x - 1) + \frac{1}{4}(\log_x a - 1)} = a$, și făcînd să apară numai

logaritmi în baza a , $\sqrt{\frac{(1 + \log_a x)^2}{4 \log_a x}} + \sqrt{\frac{(\log_a x - 1)^2}{4 \log_a x}} = a$, sau

$\frac{1 + \log_a x}{2\sqrt{\log_a x}} \pm \frac{\log_a x - 1}{2\sqrt{\log_a x}} = a$, la prima fracție s-a luat semnul plus,

căci în membrul doi a este pozitiv ca fiind bază a unui sistem de logaritmi, iar $1 + \log_a x > \log_a x - 1$, ca și $1 + \log_a x > 1 - \log_a x$, în ultimul caz ținîndu-se seama că $\log_a x$ trebuie să fie pozitiv. Avem (1) $\log_a x = a^2$ și $\log_a x = a^{-2}$, deci

$x_1 = a^a$, $x_2 = a^{\frac{1}{a}}$. *Observație.* Trebuie să avem $\log_a x > 0$. Dacă $0 < a < 1$, atunci există valori $0 < x < 1$, care satisfac relațiile (1) căci în acest interval logaritmul ia orice valoare pozitivă. Analog, dacă $a > 1$, există valori $x > 1$, care satisfac aceleași relații (1).

● 130. Logaritmînd ajungem la ecuația $x^4 = 1$. Ecuația dată nu are rădăcini reale. ● 131. $x_1 = 100$; $x_2 = 0,01$. ● 132. Luînd logaritmi în baza x , avem $2 \log_x 10 = \log_x 10 + 1$, deci $x = 10$. ● 133. $x = 9$.

● 134. 12; 2,5. ● 135. 10; 0,1. ● 136. Cum $64 = 2^6$, avem $\log_3 x =$

$$= -\frac{1}{2}, x = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \bullet 137. \text{ Avem } 0,4 = \frac{1}{2,5} \text{ și } 6,25 =$$

$$= (2,5)^2. x_1 = 10, x_2 = 10^5. \quad \bullet 138. 1; 10^{\pm \sqrt{\lg 1,5}}. \quad \bullet 139. 2; 4.$$

● 140. 18. ● 141. -3. ● 142. 1; 2. ● 143. Logaritmînd avem $\log_x (x - 2)^2 = \log_x 9$, deci $x = 5$, căci baza trebuie să fie pozitivă. ● 144.

$$\sqrt{26}. \quad \bullet 145. 0, \frac{\ln 5}{\ln 7}. \quad \bullet 146. \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}. \quad \bullet 147. 3^{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1}} = 3,$$

deci $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x-1} = 1$. Ridicînd la puterea a treia și ținînd seama de ecuație, găsim $x^3(x-1)^3 = 27x^2(x-1)$ și avem rădăcinile 0, 1 și o rădăcină irațională mai mare decît unitatea, dată de ecuația $x^3 - 2x^2 + x - 27 = 0$, după cum rezultă utilizînd, de

$$\text{exemplu, șirul lui Rolle.} \quad \bullet 148. \text{ Ecuația se poate scrie } \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} =$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3, x = \frac{3}{2}. \quad \bullet 149. 0. \quad \bullet 150. 4. \quad \bullet 151. 4; 4 - \frac{\ln 5}{\ln 3}.$$

● 152. În partea a doua a ecuației avem o progresie geometrică infinită cu suma 91. $x = 9$. ● 153. $2; \frac{\ln 2}{\ln 3} - 1$. ● 154. Ecuația se

$$\text{poate scrie } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x^3 - 40x + 123} = (\sqrt{2})^5. 4; 16. \quad \bullet 155. 9. \quad \bullet 156. 0; 1.$$

$$\bullet 157. -1. \bullet 158. \text{ Ecuația se poate scrie } 3^{\frac{10x+5}{3(x-1)}} = 3^{\frac{3(3x-7)}{3(x-3)}}, x = 4.$$

$$\bullet 159. \frac{55}{2}. \bullet 160. m = 24, x' = 25, x'' = -5; m = 150, x' = \frac{1}{25},$$

$$x'' = -\frac{1}{5}. \bullet 161. m = -1, x' = 2, x'' = 1; m = -\frac{58}{25}, x' = -\frac{1}{5},$$

$$x'' = -\frac{17}{5}. \bullet 162. \frac{p^2}{q} = \frac{7+i}{2}. x_1 = -\frac{(2-i)p}{5}, x_2 = -\frac{3+i}{5}p.$$

• 163. 1° $m = 1$ și rădăcinile sînt 3, i și $-i$. 2° Pentru $x_1 = 3$, $x_2 = -i$, $x_3 = i$, avem $D = 20i$. Luînd ca rădăcini elementele unei alte permutări ale celor trei numere, pe baza unei proprietăți a determinantilor, singurele valori posibile ale lui D sînt $20i$ și $-20i$. 3° Pentru $x_1 = 3$, $x_2 = -i$, $x_3 = i$, cele trei expresii sînt în ordine egale cu $16(i-1)$, i și $\frac{i-1}{32}$. Pentru orice permutare circulară a

numerelor 3, $-i$, i , valorile celor trei expresii se permută circular. Dacă însă luăm pentru x_1, x_2, x_3 permutările circulare ale numerelor 3, i și $-i$, valorile celor trei expresii sînt permutările

circulare ale numerelor $\frac{32}{i-1}$, $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{16(i-1)}$ (Permutările circulare ale numerelor a, b, c sînt abc, bca și cab). Prin urmare, fiecare dintre cele trei expresii date poate lua oricare din cele șase valori

de mai sus. • 164. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. $x_1 = -1, x_2 = x_3 = 6$.

• 165. $\lambda = 2, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$; $\lambda = \frac{3}{4}, x_1 = x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{4}$.

• 166. $-1, -2, 7$. • 167. $1; 3; 5$. • 168. $a = 126; x_1 = 3; x_2 = 12; x_3 = 6$. • 169. Se calculează $\operatorname{tg}(a+b+c)$ în funcție de rădăcinile ecuației și apoi se ține seama de relațiile lui Viète. • 170. Avem relațiile: $x_1 + x_2 + x_3 = -p$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q$, $x_1x_2x_3 = -r$, $x_2 = 2x_1$. Eliminînd rădăcinile x_2 și x_3 , rădăcina x_1 trebuie să verifice ecuațiile

$$\begin{array}{l|l} 7x_1^2 + 3px_1 + q = 0 & -6x_1 \\ 6x_1^3 + 2px_1^2 - r = 0 & 7 \end{array}$$

sau ecuațiile

$$\begin{array}{l|l} 7x_1^2 + 3px_1 + q = 0 & -4p \\ 4px_1^2 + 6qx_1 + 7r = 0 & 7 \end{array}$$

sau ecuațiile

$$\begin{array}{l} 7x_1^2 + 3px_1 + q = 0 \\ (12p - 42q)x_1 - 49r + 4pq = 0, \end{array}$$

deci $x_1 = \frac{49r - 4pq}{12p^2 - 42q}$. Se găsește apoi imediat că $x_2 = \frac{49r - 4pq}{6p^2 - 21q}$,

$x_3 = \frac{-12p^2 + 54pq - 147r}{12p^2 - 42q}$. Condiția ce trebuie să fie satisfă-

cută de coeficienți este $7(49r - 4pq)^2 + 3p(49r - 4pq)(12p^2 - 42q) + q(12p^2 - 42q)^2 = 0$. ● 171. $2m^3 = 9mp - 27q$. ● 172. $\lambda^2 + \mu = 0$; $-\lambda, +\lambda, -\lambda$. ● 173. $m^3 - 4mp + 8q = 0$. ● 174. $(p - 1)^2 + q^2 = 0$.

● 175. Dacă ecuația este $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, avem condiția $b^3 = a^3c$. Soluția ecuației este $x_2 = -\frac{b}{a}$, iar x_1, x_3 se obțin din

sistemul $x_1 + x_3 = \frac{b - a^2}{a}$, $x_1x_3 = \frac{ac}{b}$. ● 176. $2p^3 = 9pqr - 27q^2$.

● 177. Trebuie să avem $a + b + c = -a$, $ab + ac + bc = b$, $abc = -c$. Ultima relație ne conduce la două variante: 1° $c = 0$. Rezultă $a + b = -a$, $ab = b$, deci sau $b = 0$ și apoi $a = 0$, sau $b \neq 0$ și apoi găsim $a = 1$ și $b = -2$. În cele două cazuri ecuația dată este $x^3 = 0$, sau $x^3 + x^2 - 2x = 0$, ultima avînd rădăcinile 1, -2, 0. 2° $c \neq 0$. Relațiile dintre rădăcini și coeficienți devin $2a + b + c = 0$, $1 + (a + b)c = b$, $ab = -1$. Eliminînd pe b și c ajungem la ecuația $(a - 1)(2a^3 + 2a^2 - 1) = 0$. Polinomul din paranteză are o singură rădăcină reală cuprinsă în intervalul (0, 1). Dacă $a = 1$, rezultă $b = -1$ și $c = -1$. Ecuația dată este $x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2 = 0$. Notînd cu α rădăcina pozitivă a ecuației $2a^3 + 2a^2 - 1 = 0$, găsim $a = \alpha$, $b = -\frac{1}{\alpha}$, $c =$

$= \frac{1 - 2\alpha^2}{\alpha}$ și ecuația este $\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - x + 1 - 2\alpha^2 = 0$.

● 178. $a, a, -a, b$. ● 179. $a^2 - d^2 = ac - bd$. Rădăcinile inverse una alteia sînt date de ecuația $y^2 + \frac{b - d}{a}y + 1 = 0$, iar a treia

rădăcină este $-\frac{d}{a}$. ● 180. 5; -5; $6 \pm i$. ● 181. Ecuația dată

și transformata în $-x$, trebuie să aibă două rădăcini comune. C.m.m.d.c. al polinoamelor din partea întâia este $x^2 + \alpha$. Înlocuind în ecuația dată $x^2 = -\alpha$, găsim $\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$, deci $\alpha_1 = 1$ și

$\alpha_2 = -3$. În primul caz rezultă rădăcinile $\pm i, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, iar

în al doilea caz $\pm\sqrt{3}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. ● 182. 4, $\frac{1}{2}$, -3, $-\frac{2}{3}$;

$-3, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 4$. ● 183. $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 4, -5$. ● 184. $a=5; x_1 = -2,$

$x_2 = 7, x_3 = -1, x_4 = 6$. ● 185. Relațiile dintre rădăcini și coeficienți sînt $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = 6p, (x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = 12p - 8, x_1x_2x_3x_4 = 5$. Dacă rădăcinile verifică relația $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, rezultă $x_1 + x_2 = 2$. Se constată apoi că două dintre relațiile dintre rădăcini și coeficienți sînt identice: $x_1x_2 + x_3x_4 = 6p - 4$. Avem deci patru ecuații cu cinci necunoscute x_1, x_2, x_3, x_4 și p , sistem care este totdeauna compatibil. În adevăr, din $x_1x_2 + x_3x_4 = 6p - 4, x_1x_2x_3x_4 = 5$, rezultă, în funcție de p , produsele x_1x_2 și x_3x_4 . Rădăcinile se obțin ținînd seama că $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2$.

● 186. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, relația dată se scrie $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. Condiția cerută este $b^3 + 8d - 4bc = 0$. ● 187. $\lambda = 1$ și atunci ecuația este $(x + 1)^4 = 0$. ● 188. $\alpha = -26; x_1 = -5; x_2 = 4; x_3 = -3; x_4 = 2$.

● 189. Luînd $x_1x_2 = 4$, deducem $x_3x_4 = -1$ și relațiile dintre rădăcinile și coeficienții ecuațiilor devin $(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -p, (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 0, 4(x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) = -5$. Dacă $x_1 + x_2 = 0$ rezultă că x_1 și x_2 sînt rădăcinile ecuației $x^2 + 4 = 0$. Din ultima ecuație avem apoi $x_3 + x_4 = -\frac{5}{4}$, deci

x_3, x_4 satisfac ecuația $4x^2 + 5x - 4 = 0$. Rezultă apoi $p = \frac{5}{4}$,

asa că avem $x^4 + \frac{5}{4}x^3 + 3x^2 + 5x - 4 \equiv \frac{1}{4}(x^2 + 1)(4x^2 + 5x - 4)$.

Dacă $x_3 + x_4 = 0$, deducem $p = -5$ și avem $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4 \equiv (x^2 - 1)(x^2 - 5x + 4)$. ● 190. Condiția este $\frac{r^2}{p^2} = s$.

Sumele $(x_1 + x_2)$ și $(x_3 + x_4)$ se găsesc din sistemul

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -4p \\ (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 6q - \frac{2r}{p} \end{cases}$$

Se ține apoi seama că $x_1x_2 = \pm\sqrt{s}$. ● 191. Din relațiile dintre rădăcini și coeficienți rezultă imediat $x_4 = \lambda$. Dar x_4 trebuie să verifice ecuația dată, deci $\lambda(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4) = 0$, așa că λ poate avea numai valorile 0, 1 și 4. Deducem apoi $\lambda_1 = 0; 0, 1, \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. $\lambda_2 = 1; 1, 1, 1 \pm i\sqrt{5}$. $\lambda_3 = 4; 1, 2, 3, 4$. ● 192. Poli-

nomul $x^4 - 2x^2 + \lambda x + 1 = 0$ și derivata lui trebuie să aibă un divizor comun. În algoritmul lui Euclid se ajunge la un moment dat la un rest care are în factor parametrul λ . Dacă $\lambda = 0$, divizorul comun este $x^2 - 1$, deci polinomul dat este $(x^2 - 1)^2$. Dacă $\lambda \neq 0$, se împarte acest rest cu λ , se continuă algoritmul și pentru a avea un divizor comun de gradul întâi, trebuie ca λ să aibă valori complexe. ● 193. Polinomul din partea întâia trebuie să se împartă cu trinomul $x^2 + ax + 1$, care are rădăcinile inverse una alteia. Făcând împărțirea se găsește câtul $x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x + (-a^3 + 2a)$ și restul $(a^4 - 3a^2 - 208)x + (a^3 - 2a + 56)$. Dar restul trebuie să fie identic nul, deci $a^4 - 3a^2 - 208 = 0$, $a^3 - 2a + 56 = 0$. Singura rădăcină comună este $a = -4$. Câtul precedent devine $x^3 + 4x^2 + 15x + 56 = 0$, care are o singură rădăcină reală irațională cuprinsă între -4 și -3 . ● 194. Polinomul dat trebuie să se împartă cu un trinom de gradul al doilea de forma $x^2 + px + 1$. Avem $x^5 - 55mx + 21 \equiv (x^2 + px + 1)[x^3 - px^2 + (p^2 - 1)x - p^3 + 2p] + (p^4 - 3p^2 + 1 - 55m)x + p^3 - 2p + 21$. Rezultă că trebuie să avem $p^4 - 3p^2 + 1 - 55m = 0$, $p^3 - 2p + 21 = 0$. A doua ecuație are rădăcina -3 și două rădăcini complexe. Rezultă că $m = 1$. Avem deci descompunerea $x^5 - 55x + 21 \equiv (x^2 - 3x + 1)(x^3 + 3x^2 + 8x + 21)$. ● 195. $m = 15$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$. ● 196. $s^2 - 2p$; $s(s^2 - 3p)$; $s^4 - 4ps^2 + 2p^2$; $2p(2s^2 - p)$; $5ps(s^2 - p)$. ● 197. Din relațiile dintre rădăcini și coeficienți $\Sigma a = -p$, $\Sigma ab = q$, $abc = -r$, găsim $\Sigma a^2 = p^2 - 2q$. Apoi din ecuația dată, scrisă succesiv pentru fiecare rădăcină, avem $\Sigma a^3 = -p^3 + 3pq - 3r$, $\Sigma a^4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr$, $\Sigma a^5 = -p^5 + 5p^3q - 5p^2r - 5pq^2 + 5qr$, $\Sigma a^6 = p^6 - 6p^4q + 6p^3r + 9p^2q^2 - 12pqr - 2q^3 + 3r^2$. Avem apoi $E = \Sigma a^4bc - \Sigma a^3b^3 = p^3r - q^3$. ● 198. Avem relațiile dintre rădăcini și coeficienți $\Sigma a = 0$, $\Sigma ab = p$, $abc = -q$, de unde $\Sigma a^2 = (\Sigma a)^2 - 2\Sigma ab = -2p$. Avem apoi pe rând $\Sigma a^3 = -3q$, $\Sigma a^4 = 2p^2$, $\Sigma a^5 = 5pq$, $\Sigma a^6 = -2p^3 + 3q^2$ și cu ajutorul lor $2\Sigma a^2b^2 = \Sigma a^2\Sigma a^2 - \Sigma a^4 = 2p^2$, $\Sigma(a^2 + b^2) = 2\Sigma a^2 = -4p$, $\Sigma a^2bc = (\Sigma a)abc = 0$. Cum $E = (b - c)(c - a)(a - b) = a^2c - ac^2 + b^2a - ba^2 + c^2b - cb^2$ și deci $E^2 = \Sigma a^4b^2 - 2\Sigma a^3c^3 - 6a^2b^2c^2 + 2\Sigma a^3b^2c - 2\Sigma a^4bc$. Dar $\Sigma a^4b^2 = \Sigma a^4\Sigma a^2 - \Sigma a^6 = -2p^3 - 3q^2$, $-2\Sigma a^3c^3 = -(\Sigma a^3)^2 + \Sigma a^6 = -6q^2 - 2p^3$, $\Sigma a^2b = \Sigma a\Sigma ab - 3abc = 3q$, $2\Sigma a^3b^2c = 2abc\Sigma a^2b = -6q^2$, $-2\Sigma a^4bc = -2abc\Sigma a^3 = -6q^2$, $-6a^2b^2c^2 = -6q^2$ și prin urmare $E^2 = -27q^2 - 4p^3$. ● 199. $E = 19$. ● 200. 59. ● 201. Polinomul A este de gradul doi și are trei rădăcini distincte a, b și c , deci el este identic nul. Coeficienții lui sînt atunci nuli. ● 202. $3 - \frac{2}{q}$. ● 203. $P = -2p^3 - q^2$. ● 204. a).

$E = a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac$. b). $y^3 + 4ay^2 + (5a^2 + b)y + 2a^3 + ab + c = 0$. ● 205. a) $S_2 = -2\Sigma$; $S_3 = 3P$. b). $S_n = -\Sigma S_{n-2} + PS_{n-3}$. c). $S_4 = 2\Sigma^2$; $S_5 = -5P\Sigma$; $S_6 = -2\Sigma^3 + 3P^2$; $S_7 = 7P\Sigma^2$. e). $\Sigma = -7$; $P = 6$, $(x, y, z) = (-1, -2, 3)$. ● 206. $P = a^2b - ac + d$. ● 207. $\Sigma a^2bc = pq - 4r$, $\Sigma a^3bcd = p^2r$. ● 208. C.m.m.d.c. între $P(x)$ și $P'(x)$ este $x + 3$ și avem $P(x) = (x + 3)^2 \cdot (x^2 - 2x + 5)$. ● 209. $x_1 = x_2 = 6$, $x_3 = -1$; $m = 6$. $x_1 = x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = \frac{25}{3}$; $m = -\frac{200}{81}$. ● 210. Ecuația se scrie $(x^2 + x + 2)^2 = 0$.

● 211. Avem $P'(x) = nx^{n-2}P_1(x)$, iar $P_1(1) = P'_1(1) = P''_1(1) = 0$, $P'''_1(1) \neq 0$. ● 212. $a = 1$; $x_1 = x_2 = -1$, $x_{3,4} = \pm i$. ● 213. Rădăcina dublă trebuie să satisfacă și ecuația derivată, deci ecuațiile

$$(1) \quad \begin{cases} x^4 - 3x^2 + \alpha x + \beta = 0 \\ 4x^3 - 6x + \alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -4 \\ x \end{array}$$

sau una dintre ele și o combinație a lor

$$(2) \quad \begin{cases} 4x^3 - 6x + \alpha = 0 \\ 6x^2 - 3\alpha x - 4\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -2x \\ 3 \end{array}$$

sau ecuațiile

$$\begin{cases} 6x^2 - 3\alpha x - 4\beta = 0 \\ 6\alpha x^2 + (8\beta - 18)x + 3\alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -\alpha \\ \end{array}$$

sau în fine ecuațiile

$$\begin{cases} 6x^2 - 3\alpha x - 4\beta = 0 \\ (3\alpha^2 + 8\beta - 18)x + 4\alpha\beta + 3\alpha = 0 \end{cases}$$

Rădăcina dublă este

$$x = -\frac{4\alpha\beta + 3\alpha}{3\alpha^2 + 8\beta - 18}$$

și condiția căutată se obține din prima ecuație

$$6 \frac{(4\alpha\beta + 3\alpha)^2}{(3\alpha^2 + 8\beta - 18)^2} + 3\alpha \frac{4\alpha\beta + 3\alpha}{3\alpha^2 + 8\beta - 18} - 4\beta = 0.$$

Ea este $27\alpha^4 + 432\alpha^2\beta - 108\alpha^2 - 256\beta^3 - 144\beta = 0$. *Observație.* La sistemele (1) sau (2) se ajunge și dacă se aplică metoda coeficienților nedeterminați, sau relațiile dintre rădăcini și coeficienți.

● 214. Notînd cu x_1 , rădăcina dublă și cu x_3, x_4 celelalte două rădăcini avem $2x_1 + x_3 + x_4 = 0$, $2x_1(x_3 + x_4) + x_1^2 + x_3x_4 = -3$, $x_1^2(x_3 + x_4) + 2x_1x_3x_4 = -\alpha$, $x_1^2x_3x_4 = \beta$, de unde $x_3 + x_4 = -2x_1$ și $x_3x_4 = -3 + 3x_1^2$. Din ultimele două relații dintre rădăcini și coeficienți deducem că rădăcina dublă trebuie să satisfacă ecuațiile

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 6x_1 + \alpha = 0 \\ 3x_1^4 - 3x_1^2 - \beta = 0 \end{cases} \begin{array}{l} -3x_1 \\ 4 \end{array}$$

sau ecuațiile

$$\begin{cases} 4x_1^3 - 6x_1 + \alpha = 0 \\ 6x_1^2 - 3\alpha x_1 - 4\beta = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 3 \\ -2x_1 \end{array}$$

sau ecuațiile

$$\begin{cases} 6x_1^2 - 3\alpha x_1 - 4\beta = 0 \\ 6\alpha x_1^2 + (8\beta - 18)x_1 + 3\alpha = 0 \end{cases} \begin{array}{l} -\alpha \\ \end{array}$$

sau în fine ecuațiile

$$\begin{cases} 6x_1^2 - 3\alpha x_1 - 4\beta = 0 \\ (8\beta + 3\alpha^2 - 18)x_1 + 3\alpha + 4\alpha\beta = 0. \end{cases}$$

Prin urmare ecuația locului căutat este $6(3\alpha + 4\alpha\beta)^2 + 3\alpha(3\alpha + 4\alpha\beta)(3\alpha^2 + 8\beta - 18) - 4\beta(3\alpha^2 + 8\beta - 18)^2 = 0$. ● 215. Din relațiile dintre rădăcini și coeficienți se găsește $x_1^3 = p$, $3x_1^4 = q$ deci relația dintre parametrii este $27p^4 = q^3$. Luînd ca parametru $t = x_1$, avem $p = t^3$, $q = 3t^4$. ● 216. Ecuațiile $x^4 - 3x^2 + \alpha x + \beta = 0$, $4x^3 - 6x + \alpha = 0$, $12x^2 - 6 = 0$ trebuie să fie simultan verificate. Rădăcina triplă nu poate fi decît $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. În

primul caz găsim $\alpha = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $\beta = -\frac{3}{4}$, iar în al doilea caz $\alpha = -\frac{4}{\sqrt{2}}$,

$\beta = -\frac{3}{4}$. A patra rădăcina este $3\left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ● 217. $m = -2$;

$n = -1$; $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; $x_4 = -1$. ● 218. Notînd $f(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, rădăcina i trebuie să verifice polinomul $f(x) + i$ și primele două derivate. Dintr-un sistem de 6 ecuații liniare se găsesc coeficienții. Avem $f(x) = x^6 - \frac{3}{8}x^5 +$

$$+ 3x^4 - \frac{10}{8}x^3 + 3x^2 - \frac{15}{8}x + 1; f(x) + i = (x - i)^3 \left[x^3 + \left(-\frac{3}{8} + 3i \right) x^2 + \left(-3 - \frac{9}{8}i \right) x + 1 - i \right]. \bullet 219.$$

Notînd $x_1 = x_2 = x_3$ și x_4, x_5 rădăcinile ecuației, din primele două relații dintre rădăcini și coeficienți, avem $x_4 + x_5 = -m - 3x_1$, $x_4 x_5 = 3x_1(m + 2x_1)$. Cu acestea, ultimele trei relații între rădăcini și coeficienți devin $x_1^3 - 3x_1^2(m + 3x_1) + 9x_1^2(m + 2x_1) = -n$, $x_1(15x_1 + 8m) = 0$, $3x_1^4(m + 2x_1) = -p$. Dacă $x_1 = 0$ rezultă $n = p = 0$. Dacă $x_1 \neq 0$, avem condițiile $2 \cdot 8^2 m^3 = -3 \cdot 15^2 n$ și $8^4 m^5 = 5 \cdot 15^4 p$. **220.** Scriind că $P'(x)$ și $P''(x)$ au un divizor comun de gradul întâi, obținem prima condiție $8p^3 + 27q^2 = 0$, și divizorul comun, care dă rădăcina triplă $x = -\frac{3q}{4p}$. Înlocuind această valoare în $P(x)$, obținem a

doua condiție $81q^4 - 48p^3q^2 + 256r^2p^4 = 0$. Din cele două condiții rezultă: $27q^2 = 96rp = -8p^3$. A patra rădăcină este $\frac{9q}{4p}$. **221.** Tre-

buie să avem $x^6 + mx^4 + 10x^3 + nx + p \equiv (x - \alpha)^4(x^2 + \beta x + \gamma)$. Pentru α se găsește $\alpha^3 = 1$, care are singura rădăcină reală $\alpha = 1$ (ecuația nu poate avea o rădăcină complexă de ordinul patru!).

Găsim apoi $\beta = 4$, $\gamma = \frac{5}{2}$, $m = -\frac{15}{2}$, $n = -6$, $p = \frac{5}{2}$.

222. Ecuația dată și cele obținute prin trei derivări succesive trebuie să aibă o rădăcină comună. Cum ultima din acestea este $120x^3 - 120x = 0$, rezultă că rădăcina comună nu poate fi decât unul dintre numerele 0, 1 sau -1. Se găsesc ecuațiile $x^4(x^2 - 5) = 0$, $(x - 1)^4(x^2 + 4x + 5) = 0$, $(x + 1)^4(x^2 - 4x + 5) = 0$. **223.** Putem avea două rădăcini duble, deci $x^4 + \alpha x^2 + \beta x + 1 \equiv (x - a)^2(x - b)^2$ și rezultă $\alpha = \pm 2$, $\beta = 0$, deci polinomul dat este $(x^2 \pm 1)^2 = 0$. Putem avea sau rădăcinile duble $\pm i$ sau rădăcinile duble ± 1 . Nu putem avea o rădăcină triplă și una simplă căci ar rezulta $3a^4 = -1$. Ori a trebuie să fie real, căci dacă ar fi complex, ecuația dată ar trebui să aibă altă rădăcină triplă, complex conjugată cu precedenta. **224.** Putem avea sau două rădăcini duble, sau o rădăcină triplă și una simplă. 1° Găsim rădăcinile duble $-1 \pm \sqrt{2}$, $p = -4$, $q = 1$. 2° Rădăcina triplă are una din valorile $\frac{-3 \pm \sqrt{6}}{3}$, iar cea simplă una din valorile $-1 \mp \sqrt{6}$.

Ultimele două relații dintre rădăcini și coeficienți ne dau valorile parametrilor p și q . **225.** 1° $q = r = 0$, $x^3(x + p) = 0$. 2° $4q =$

$= -p^3$, $16r = -p^4$, $(2x + p)^3(2x - p) = 0$. ● 226. C.m.m.d.c. trebuie să fie de gradul trei. Găsim $m = 8$. Cele două polinoame au rădăcinile $-1, \frac{1}{2}, 2, 4, -1, \frac{1}{2}, 2, -4$. ● 227. $a = -4$;

$b = -5$. Rădăcinile comune sînt 1 și -1 . ● 228. Cele două ecuații au rădăcinile inverse una alteia. Să examinăm întîi cîteva cazuri particulare. Dacă $c = 0$, avem $(ax^2 + b)x = 0$ și $bx^2 + a = 0$, deci trebuie ca $a = b$, astfel încît rădăcinile comune sînt $\pm i$. Dacă $b = 0$, trebuie ca $a = c$ și toate trei rădăcinile sînt comune, căci ecuațiile sînt $x^3 + 1 = 0$. Dacă $a = 0$, nu putem avea două rădăcini comune. Presupunînd că a, b și c sînt diferiți de zero, ca cele două ecuații să aibă două rădăcini comune, trebuie ca polinoamele din partea întîia a ecuațiilor să aibă drept cel mai mare divizor comun un polinom de gradul doi. Avem

$$\begin{array}{r|l} ax^3 + bx + c & a \\ acx^3 + bcx + c^2 & cx \\ \hline -abx^2 + bcx + c^2 - a^2 & \begin{array}{l} cx^3 + bx^2 + a \\ abcx^3 + ab^2x^2 + a^2b \\ \hline (ab^2 + bc^2)x^2 - c(a^2 - c^2)x + a^2b \end{array} \end{array}$$

Ultimul cît și ultimul rest trebuie să aibă coeficienții proporționali deci $\frac{ab^2 + bc^2}{ab} = \frac{c(a^2 - c^2)}{bc} = \frac{a^2b}{a^2 - c^2}$, așa că $ab^2 + bc^2 = -a(c^2 - a^2)$, $(c^2 - a^2)^2 = a^2b^2$. Prima relație se scrie $a(a^2 - b^2) = c^2(a + b)$. Dacă $a = -b$, atunci din a doua relație avem $c^2 - 2a^2 = 0$, iar dacă $a(a - b) = c^2$ se constată că a doua relație este verificată. Dacă $a = -b$ și $c = \pm a\sqrt{2}$, ecuațiile sînt $x^3 - x \pm \sqrt{2} = 0$, și $\pm \sqrt{2}x^3 - x^2 + 1 = 0$. Ele au cel mai mare divizor comun $x^2 \mp \sqrt{2}x + 1$, care are rădăcinile inverse una alteia. Avem $x^3 - x \pm \sqrt{2} \equiv (x^2 \mp \sqrt{2}x + 1)(x \pm \sqrt{2})$, $\pm \sqrt{2}x^3 - x^2 + 1 \equiv (x^2 \mp \sqrt{2}x + 1)(\pm \sqrt{2}x + 1)$. Dacă $c = \pm \sqrt{a(a - b)}$, cele două polinoame sînt $ax^3 + bx \pm \sqrt{a(a - b)}$ și $\pm \sqrt{a(a - b)}x^3 + bx^2 + a$ care au cel mai mare divizor comun $ax^2 \mp \sqrt{a(a - b)}x + a$ și avem $ax^3 + bx \pm \sqrt{a(a - b)} \equiv (ax^2 \mp \sqrt{a(a - b)}x + a)\left(x \pm \sqrt{\frac{a - b}{a}}\right)$; $\pm \sqrt{a(a - b)}x^3 + bx^2 + a \equiv (ax^2 \mp \sqrt{a(a - b)}x + a)\left(\pm \sqrt{\frac{a - b}{a}}x + 1\right)$. ● 229. Ecuația este de gradul doi în $y = \cos x$, $f(y) = 4(m + 1)y^2 - 8my - 5m + 7 = 0$ deci trebuie ca $y \in [-1, 1]$. În discuție

vor interveni discriminantul $\Delta = 4(9m^2 - 2m - 7)$, $af(1) = 4(m + 1)(-9m + 11)$, $af(-1) = 4(m + 1)(7m + 11)$, precum și suma S a rădăcinilor în expresiile $\frac{S}{2} - 1 = \frac{-1}{m + 1}$, $\frac{S}{2} - (-1) = \frac{2m + 1}{m + 1}$. Avem următoarea discuție

m	Δ	$af(1)$	$af(-1)$	$\frac{S}{2} - 1$	$\frac{S}{2} + 1$	Rădăcini y	Rădăcini x
$\left(-\infty, -\frac{11}{7}\right)$	+	-	+			$-1 < y_1 < 1 < y_2$	două
$-\frac{11}{7}$	+	-	0			$y_1 = -1$	$x = \pi$, una
$\left(-\frac{11}{7}, -1\right)$	+	-	-			$y_1 < -1 < 1 < y_2$	nici una
-1	+	0	0			$y_1 = -\frac{3}{2}$	nici una
$\left(-1, -\frac{7}{9}\right)$	+	+	+	-	-	$y_1 < y_2 < -1 < 1$	nici una
$-\frac{7}{9}$	0	+	+			$y_1 = y_2 = -\frac{7}{2}$	nici una
$\left(-\frac{7}{9}, 1\right)$	-	+	+			complexe	nici una
1	0	+	+			$y_1 = y_2 = \frac{1}{2}$	$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$, două
$\left(1, \frac{11}{9}\right)$	+	+	+	-	+	$-1 < y_1 < y_2 < 1$	patru
$\frac{11}{9}$	+	0	+			$y_1 = \frac{1}{10}, y_2 = 1$	trei
$\left(\frac{11}{9}, +\infty\right)$	+	-	+			$-1 < y_1 < 1 < y_2$	două

● **230.** Punînd $x^2 = y$, obținem ecuația $y^2 + 2(2\alpha - 1)y + 3(\alpha^2 - 1) = 0$. Pentru aceasta, discriminantul, suma și produsul rădăcinilor sînt $\Delta = (\alpha - 2)^2$, $S = -(2\alpha - 1)$, $P = 3(\alpha^2 - 1)$. Avem următoarea discuție

α	Δ	P	S	rădăcini y	rădăcini x
$(-\infty, -1),$	+	+	+	$y_1 > 0, y_2 > 0$	patru reale
-1	+	0	+	$y_1 = 0, y_2 > 0$	$x_1 = x_2 = 0, x_3, x_4$ reale
$\left(-1, +\frac{1}{2}\right)$	+	-	+	$y_1 < 0, y_2 > 0$	două reale
$\frac{1}{2}$	+	-	0	$y_1 = -y_2$	două reale
$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	+	-	-	$y_1 < 0, y_2 > 0$	două reale
1	+	0	-	$y_1 = 0, y_2 < 0$	$x_1 = x_2 = 0$
$(1, 2)$	+	+	-	$y_1 < 0, y_2 < 0$	rădăcini complexe
2	0	+	-	$y_1 = y_2 < 0$	rădăcini complexe
$(2, +\infty)$	+	+	-	$y_1 < 0, y_2 < 0$	rădăcini complexe

● **231.** Transformata în $\frac{1}{x}$, $12x^4 - 27x^3 - 15x^2 + 1 = 0$, are două rădăcini reale în intervalele $(0, 2)$ și $(2, +\infty)$, deci ecuația inițială are două rădăcini reale în intervalele $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ și $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. ● **232.** Facem substituția $x = y + h$ și determinăm pe h astfel ca să dispară termenul de gradul 3. Obținem $h = 1$ și $P(y + 1) = 4y^4 - 12y^3 + 4y + 3 = 0$. Facem substituția $y = \frac{1}{z}$ și obținem: $P(z) = 3z^4 + 4z^3 - 12z^2 + 4 = 0$. Construind șirul lui Rolle obținem pentru z intervalele $(-\infty, -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 1)$, $(1, +\infty)$,

pentru y intervalele $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\infty\right)$, $(\infty; 1)$, $(1; 0)$ iar

pentru x (după ce au fost restrânse) intervalele $(-1; 0)$, $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$,

$(1; 2)$, $(2; 3)$. ● **233.** Dacă $\alpha \in (-\infty, -68)$ avem o rădăcină reală în $(-\infty, -2)$, dacă $\alpha \in (-68, 275)$ avem trei rădăcini reale, separate de numerele -2 și 5 , dacă $\alpha = -68$ sau $\alpha = 275$ avem o rădăcină dublă și încă una reală, iar dacă $\alpha \in (275, +\infty)$, avem o singură rădăcină reală. ● **234.** Ecuația derivată este reciprocă

și are rădăcinile reale $\frac{1}{2}$ și 2 . Avem $m \in (-\infty, 3/16) \cup (56, +\infty)$

o rădăcină reală, $m = 3/16$, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 \in \mathbf{R}$; $m \in (3/16, 56)$,

3 reale; $m = 56$, $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 \in \mathbf{R}$. ● **235.** Cum rădăcinile ecuației derivate sînt $-\alpha$, α și 2α , așezarea lor în ordine crescătoare depinde de semnul parametrului α . Avem următoarele posibilități

$\alpha > 0$	$-\infty$ $f(-\infty)$	$-\alpha$ $-\alpha^2(19\alpha^2 + 17)$	$+\alpha$ $\alpha^2(13\alpha^2 - 17)$	2α $\alpha^2(8\alpha^2 - 17)$	$+\infty$ $f(+\infty)$	Rădăcini
$0; \sqrt{\frac{17}{13}}$	+	-	-	-	+	2 reale, 2 complexe
$\sqrt{\frac{17}{13}}$	+	-	0	-	+	$x_1 = x_2 = \alpha$, 2 reale
$\sqrt{\frac{17}{13}}, \sqrt{\frac{17}{8}}$	+	-	+	-	+	4 reale
$\sqrt{\frac{17}{8}}$	+	-	+	0	+	$x_1 = x_2 = 2\alpha$, 2 reale
$\sqrt{\frac{17}{8}}, +\infty$	+	-	+	+	+	2 reale, 2 complexe.

$\alpha < 0$	$-\infty$ $f(-\infty)$	2α $\alpha^2(8\alpha^2 - 17)$	α $\alpha^2(13\alpha^2 - 17)$	$-\alpha$ $-\alpha^2(19\alpha^2 + 17)$	$+\infty$ $f(+\infty)$	Rădăcini
$-\infty; -\sqrt{\frac{17}{8}}$	+	+	+	-	+	2 reale, 2 complexe
$-\sqrt{\frac{17}{8}}$	+	0	+	-	+	$x_1 = x_2 =$ $= 2\alpha,$ 2 reale
$-\sqrt{\frac{17}{8}};$ $-\sqrt{\frac{17}{13}}$	+	-	+	-	+	4 reale
$-\sqrt{\frac{17}{13}}$	+	-	0	-	+	$x_1 = x_2 =$ $= \alpha,$ 2 reale
$-\sqrt{\frac{17}{13}}, 0$	+	-	-	-	+	2 reale, 2 complexe
0	+	0	0	0	+	$x_1 = x_2 =$ $= x_3 =$ $= x_4 = 0$

● 236. Se consideră funcția $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x} - \lambda$, discontinuă pentru $x = 0$. Șirul lui Rolle se aplică pe intervalele $(-\infty, -0)$ și $(+0, +\infty)$. Avem

$\lambda \backslash x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	-0	$+0$	1	$+\infty$
$f(x)$	+	$\frac{27}{4} - \lambda$	$+\infty$	$-\infty$	$-\lambda$	+
0	+	+	+	-	+	+
$\frac{27}{4}$	+	+	+	-	0	+
	+	+	+	-	-	+
	+	0	+	-	-	+
	+	-	+	-	-	+

o rădăcină reală $(0, 1)$
 $x = 1$. rădăcină triplă
o rădăcină reală în $(1, +\infty)$
 $x = -\frac{1}{2}$ rădăcină dublă și o rădăcină reală în $(1, +\infty)$
rădăcini reale în $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ și $(1, +\infty)$.

● **237.** Notînd $f(x) = x^m + px + q$, avem $f'(x) = mx^{m-1} + p$, așa că derivata se anulează pentru valorile $x = \sqrt[m-1]{-\frac{p}{m}}$. Dacă $m - 1$ este impar, avem o singură rădăcină reală α , iar dacă $m - 1$ este par și $p < 0$, avem două rădăcini reale $-\beta$ și β . Utilizînd șirul lui Rolle avem următoarele posibilități

1° $m = 2n$.

$-\infty$	α	$+\infty$
+	$f(\alpha)$	+

+	—	+	2 rădăcini reale
+	0	+	o rădăcină reală dublă
+	+	+	nici o rădăcină reală

2° $m = 2n + 1$.

$p > 0$, o singură rădăcină reală

$p = 0$, rezultă $\beta = 0$

$-\infty$	0	$+\infty$
—	q	+

—	—	+	o singură rădăcină reală
—	0	+	$x = 0$, rădăcină multiplă
—	+	+	o singură rădăcină reală.

$p < 0$

$-\infty$	$-\beta$	β	$+\infty$
—	$f(-\beta)$	$f(\beta)$	+

—	—	+	+	o singură rădăcină reală
—	0	+	+	o rădăcină reală triplă
—	+	0	+	o rădăcină reală dublă și una simplă,
—	+	—	+	trei rădăcini reale.

● **238.** Ecuația derivată are numai rădăcina $x = 1$. Dacă $a < 0$, două reale de semne contrarii, $a = 0$, o rădăcină nulă și una pozitivă, $0 < a < -1 - \ln 2 + \frac{3\pi}{2}$, două rădăcini pozitive, $a = -1 - \ln 2 + \frac{3\pi}{2}$, o rădăcină dublă pozitivă, $a > -1 - \ln 2 + \frac{3\pi}{2}$,

nici o rădăcină reală. ● 239. Ecuația derivată $f'(x) = 2x(2x^2 + p)$, are rădăcinile $x = 0$, $x = \pm \sqrt{-\frac{p}{2}}$. Dacă $p > 0$

$$\frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{ccc} -\infty & 0 & +\infty \\ + & q & + \end{array} \right.$$

deci dacă $q > 0$ nu avem rădăcini reale, $q = 0$ avem rădăcina dublă $x = 0$, $q < 0$ avem două rădăcini reale. Dacă $p < 0$

$$\frac{x}{f(x)} \left| \begin{array}{ccccc} -\infty & -\sqrt{-\frac{p}{2}} & 0 & \sqrt{-\frac{p}{2}} & +\infty \\ + & -\frac{p^2}{4} + q & q & -\frac{p^2}{4} + q & + \end{array} \right.$$

deci dacă $q < 0$ atunci și $-\frac{p^2}{4} + q < 0$ și avem două rădăcini reale, $q = 0$ patru rădăcini reale (una dublă), $q > 0$ dacă $-\frac{p^2}{4} +$

$+q > 0$ nu avem nici o rădăcină reală, iar dacă $-\frac{p^2}{4} + q < 0$ avem patru rădăcini reale. ● 240. Se formează șirul lui Rolle pentru ecuația $16x^5 - 45x^2 + \lambda - \frac{10}{x} = 0$. Funcția din prima parte a

ecuației fiind discontinuă în origine, vom căuta rădăcinile ecuației în intervalele $(-\infty, -0)$ și $(+0, +\infty)$. Dacă $\lambda \in \left(-\infty, \frac{123}{4}\right)$ avem două rădăcini reale în intervalele $(-\infty, 0)$ și $(1, +\infty)$, dacă $\lambda = \frac{123}{4}$, avem rădăcini reale în $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$ și rădăcina dublă $\frac{1}{2}$,

dacă $\lambda \in \left(\frac{123}{4}, 39\right)$ rădăcini reale în $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ și $(1, +\infty)$, dacă $\lambda = 39$, rădăcini reale în $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ și rădăcina dublă $x = 1$, iar dacă $\lambda \in (39, +\infty)$ avem două rădăcini reale în $(-\infty, 0)$ și $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. ● 241. $m \in (-\infty; -6/5)$, pentru

rădăcini complexe; $m \in [-6/5; +\infty)$, patru rădăcini reale negative.

● 242.

x	$-\infty$	$3a$	a	0	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	$-a^2(27a^2 + 5)$	$5a^2(a^2 - 1)$	$-5a^2$	$+$	
$a \leq 0$						
$-\infty$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	2 rădăcini reale
-1	$+$	$-$	0	$-$	$+$	4 rădăcini reale (una dublă)
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4 rădăcini reale
0	$+$	0	0	0	$+$	o rădăcină cuadruplă

x	$-\infty$	0	a	$3a$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	$-5a^2$	$5a^2(a^2 - 1)$	$-a^2(27a^2 + 5)$	$+$	
$a > 0$						
0	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	2 rădăcini reale
1	$+$	$-$	0	$-$	$+$	4 rădăcini reale (una dublă)
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4 rădăcini reale

Pentru $a = -1$, ecuația are rădăcinile $-1, -1, \frac{-5 \pm 2\sqrt{10}}{3}$,

iar pentru $a = 1$, rădăcinile $1, 1, \frac{5 \pm 2\sqrt{10}}{3}$. ● 243. Ecuația

derivată este $4x^3 - 6ax^2 + 2a^3 = 2(2x + a)(x - a)^2 = 0$. Formăm șirul lui Rolle, introducînd și valoarea $-a$, după cum cere problema

x	$-\infty$	$-a$	$-\frac{a}{2}$	0	a	$+\infty$	Discuție
$f(x)$	$+$	m^4	$\frac{16m^4 - 27a^4}{16}$	$m^4 - a^4$	m^4	$+$	
	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$m = 0$. Rădăcina simplă $x = -a$ și rădăcina triplă $x = a$.
	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$m^2 < a^2$. O rădăcină pozitivă și una negativă
	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$a^2 < m^2 < \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 2 rădăcini reale în $(-a, 0)$.
	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$m^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. O rădăcină dublă $x = -a$.

Aplicație: Raportînd elipsa la axele ei și notînd cu $|x|$ distanța de la origine la baza triunghiului, pentru x obținem ecuația de mai sus. Deci avem totdeauna două triunghiuri cu arie dată. ● 244. Derivata

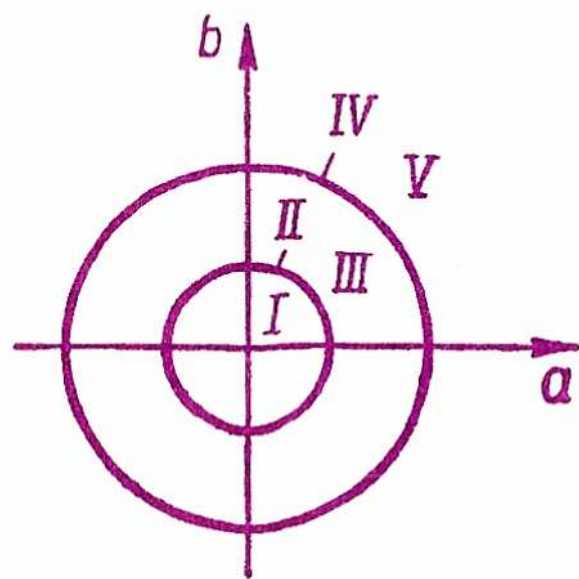


Fig. S.4.3

funcției $f(x)$ se anulează pentru $+1$ și -1 și avem $f(-1) = a^2 + b^2 - 1$ și $f(1) = a^2 + b^2 - 5$. Cum $a^2 + b^2 - 1 = 0$ și $a^2 + b^2 - 5 = 0$, față de un sistem de axe de coordonate Oab , acestea reprezintă două cercuri cu centrul în origine și razele 1 și $\sqrt{5}$; planul se împarte în cinci regiuni (Fig. S.4.3). În tabelul de mai jos este menționat numărul rădăcinilor reale din fiecare regiune.

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
	$-$	a^2+b^2-1	a^2+b^2-5	$+$	rădăcini reale
I	$-$	$-$	$-$	$+$	una
II	$-$	0	$-$	$+$	trei (una dublă)
III	$-$	$+$	$-$	$+$	trei
IV	$-$	$+$	0	$+$	trei (una dublă)
V	$-$	$+$	$+$	$+$	una

● 245. Cum partea întâia a ecuației are două variații, ecuația are două rădăcini pozitive, sau nici una (Descartes). Dar $f(0) = 2 > 0$, $f(\sqrt{2}) = -2 - \sqrt{2} < 0$, așa că ecuația are o singură rădăcină reală în intervalul dat (cealaltă este 2). ● 246. Șirul lui Sturm este $f = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 7$; $f_1 = 4x^3 - 9x^2 + 4x - 1$; $f_2 = 11x^2 - 109$; $f_3 = -15x + 31$; $f_4 = 35$ 096. Nu avem nici o rădăcină reală, căci $v(-\infty) = 2$ și $v(+\infty) = 2$. ● 247. Șirul lui Sturm este $x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2$; $x^4 - 3x^2 - 4x$; $x^3 + 3x^2 - 1$; $-2x^2 + x + 1$; $-3x + 1$; -1 . Avem câte o rădăcină reală în intervalele $(-1, 0)$, $(0, 1)$ și $(2, 3)$. ● 248. Ridicînd ecuația la puterea a treia se ajunge la $2 + 3\sqrt[3]{1-x^2}(\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}) = 0$ deci la $2 = 0$. Prin urmare ecuația dată nu are rădăcini. Același rezultat se obține observînd că $\sqrt[3]{x+1} > -\sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{1-x}$. ● 249. Se reprezintă grafic funcția $y = \frac{1-x^5}{x^4}$

(Fig. S.4.4). Dacă $a \leq -\frac{5}{\sqrt[5]{4^4}}$ avem trei rădăcini reale și una singură în caz contrar. ● 250. Se reprezintă grafic funcția $y = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin 2x}$ periodică de perioadă 2π . Reprezentarea se va face în intervalul $[0, 2\pi]$ (Fig. S.4.5). Avem

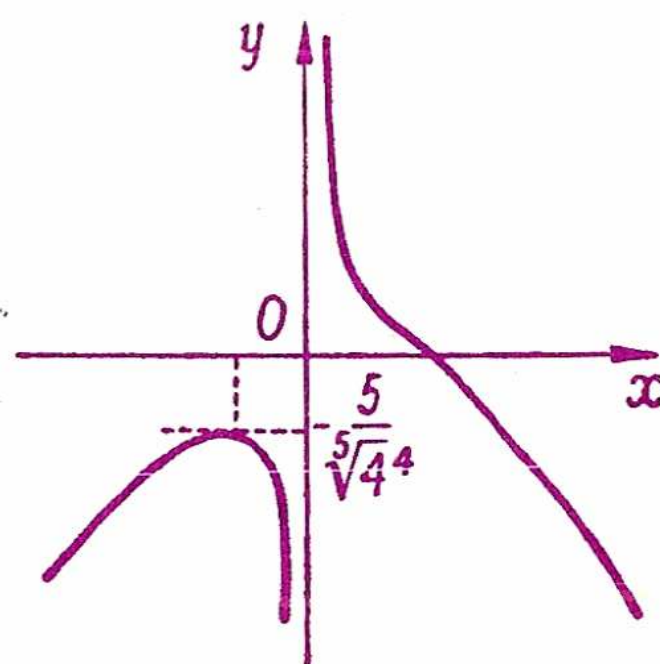


Fig. S.4.4

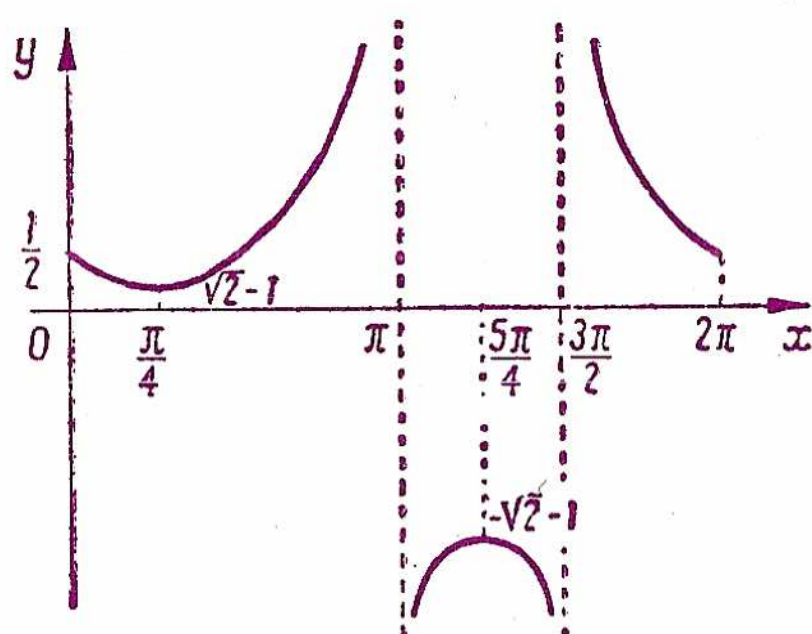


Fig. S.4.5

$$y = \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{x}{2} \cos x} = \frac{1}{2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)}, \text{ discontinuă în } \pi \text{ și } \frac{3\pi}{2}.$$

Derivata ei $y' = \frac{1}{4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2}$ se anulează în $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$.

$\frac{5\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y'	---	0	+++++	+++0--	---	---
y	$\frac{1}{2}$	$\searrow \sqrt{2}-1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -\sqrt{2}-1 \searrow +\infty$	$+\infty \searrow \frac{1}{2}$		

Avem apoi următoarea discuție

$\lambda \leq -\sqrt{2} - 1$ și $\lambda \geq \sqrt{2} - 1$ două rădăcini reale,

$-\sqrt{2} - 1 < \lambda < \sqrt{2} - 1$ nu avem rădăcini reale.

În afară de acestea și oricare ar fi λ , ecuația dată are și rădăcinile $0, 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, care anulează factorii $\sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)$, cu care s-a simplificat în funcția y .

● 251. $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ecuația se poate scrie $\sin(x - \alpha) = x \cos \alpha - \sin \alpha$ și rădăcinile ei se obțin intersectând sinusoida $y = \sin(x - \alpha)$ cu dreapta $y = x \cos \alpha - \sin \alpha$ (Fig. S.4.6), care se vede că este tangentă la sinusoidă în $x=0$. Rezultă că afară de rădăcina $x=0$, ecuația mai are o rădăcină în intervalul $\alpha, \alpha + \frac{3\pi}{2}$, dacă $\alpha > 0$ sau $\alpha - \frac{3\pi}{2}$, α , dacă $\alpha < 0$.

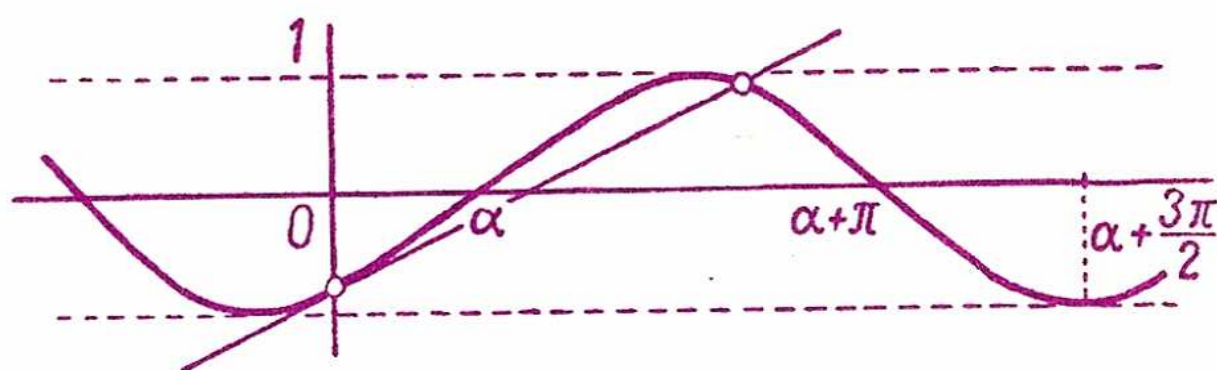


Fig. S.4.6

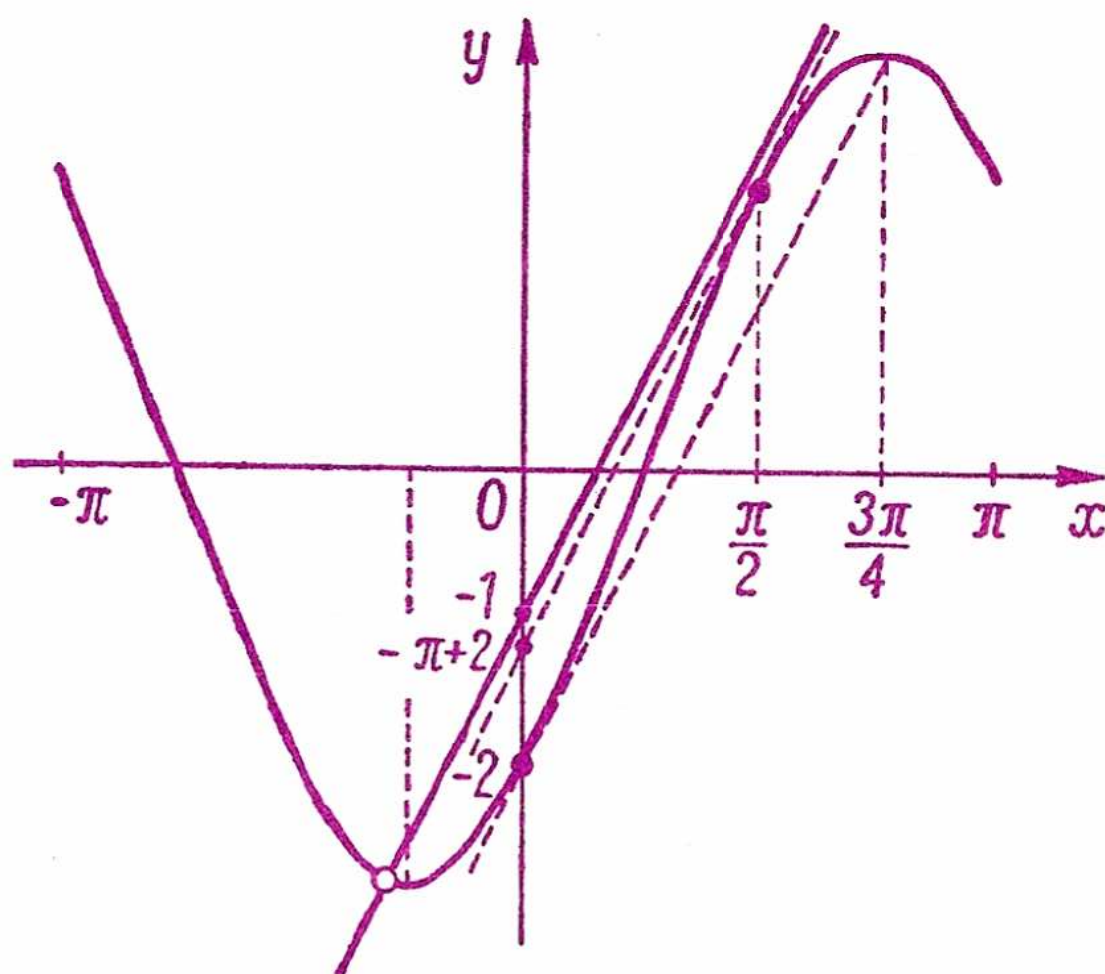


Fig. S.4.7

● 252. Vom reprezenta grafic curbele de ecuații $y = 2x - 1$ și $y = 2 \sin x - 2 \cos x = 2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Se vede ușor că dreapta intersectează sinusoida într-un punct de abscisă în $\left(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$ (Fig. S.4.7).

Pentru a vedea dacă mai avem și alte puncte de intersecție, căutăm abscisele punctelor de pe sinusoidă în care panta tangentei să fie aceeași cu a dreptei de ecuație $y = 2x - 1$, deci

2. Găsim $x = \frac{\pi}{2}$ și $x = 0$. Tangentele în aceste două puncte

$y = 2x - \pi + 2$, $y = 2x - 2$, au ordonatele în origine mai mici decât ale dreptei, deci în $(-\pi, \pi)$ nu mai avem alte puncte

de intersecție. ● 253. Ecuația se scrie $x - \alpha - \frac{\sin \frac{3\alpha}{2}}{\cos \alpha} - \frac{\sin\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 0$.

Reprezentînd grafic dreapta și sinusoida, constatăm că ecuația dată are o singură rădăcină pozitivă. ● 254. Se reprezintă arcul din parabolă $y = -(x^2 - 3x - 2)$, pentru $x \in (-1, 2)$ (Fig. S.4.8). Avem următoarea discuție: pentru $m < -2$ nu avem rădăcini, pentru $-2 \leq m < 4$ avem o rădăcină, pentru $4 \leq m \leq \frac{17}{4}$ avem două ră-

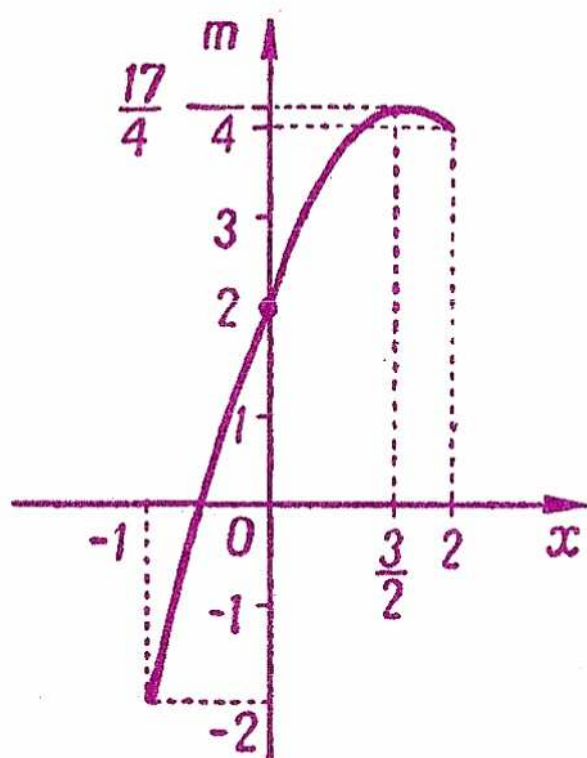


Fig. S.4.8

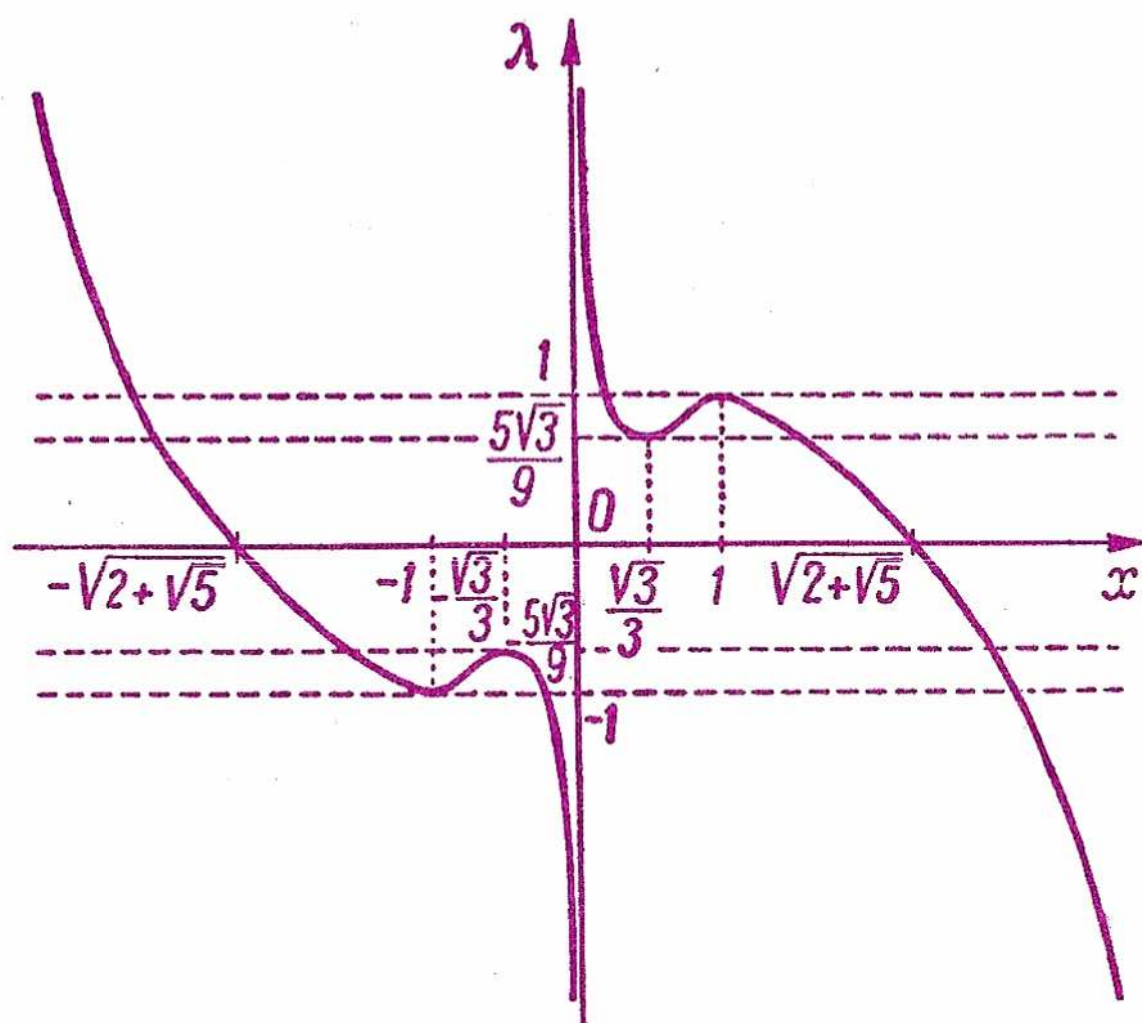


Fig. S.4.9

dăcini, iar pentru $m > \frac{17}{4}$ nu avem rădăcini. ● 255. Se reprezintă grafic funcția $y = \frac{-x^4 + 4x^2 + 1}{4x}$ (Fig. S.4.9). Avem discuția

$\lambda \in (-\infty, -1)$, două rădăcini reale,

$\lambda \in \left[-1, -\frac{5\sqrt{3}}{9}\right]$, patru rădăcini reale,

$\lambda \in \left(-\frac{5\sqrt{3}}{9}, \frac{5\sqrt{3}}{9}\right)$, două rădăcini reale,

$\lambda \in \left[\frac{5\sqrt{3}}{9}, 1\right]$, patru rădăcini reale,

$\lambda \in (1, +\infty)$, două rădăcini reale.

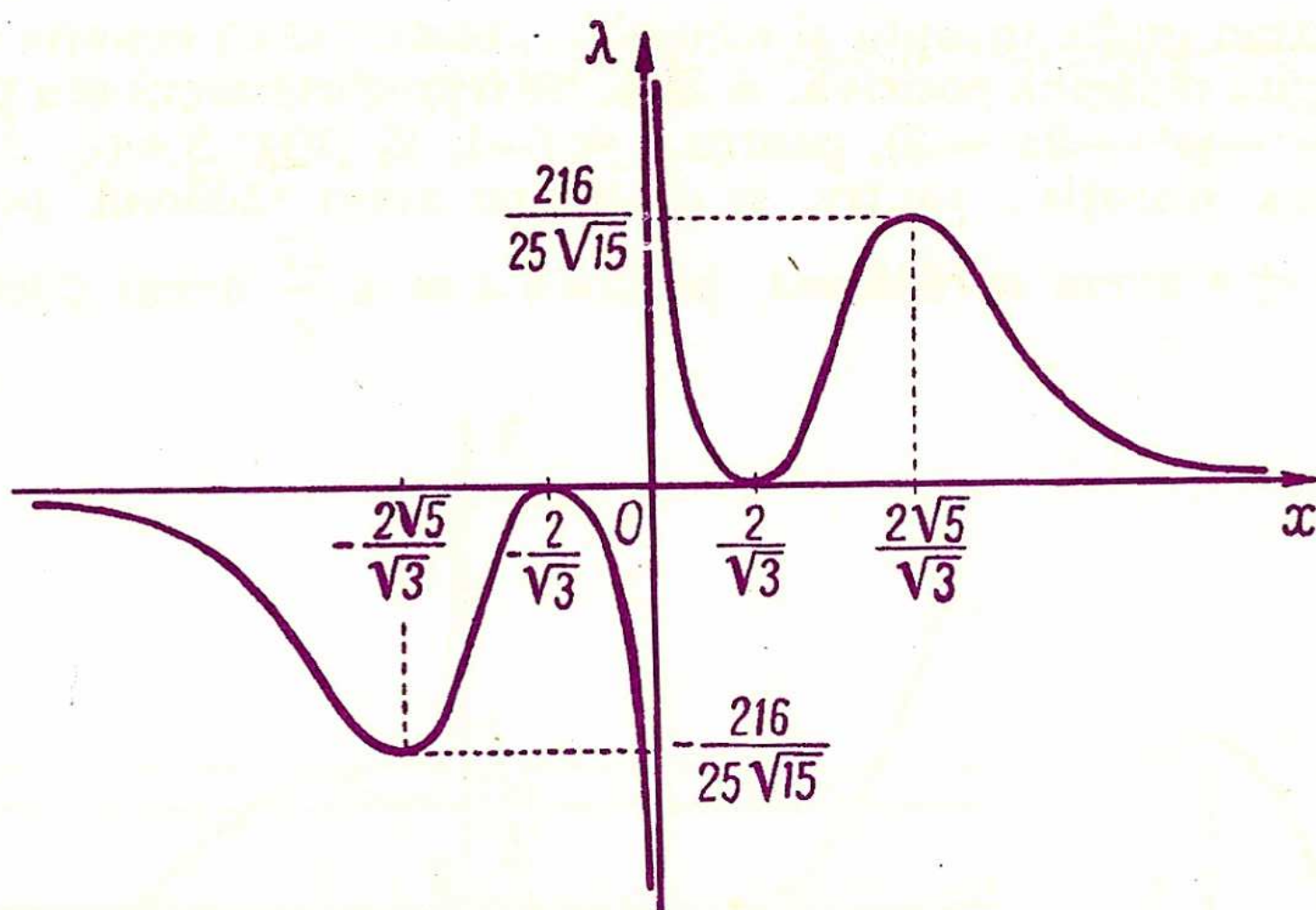


Fig. S.4.10

● 256. Se reprezintă grafic funcția $y = \frac{(3x^2 - 4)^2}{x^5}$ (Fig. S.4.10) și avem discuția :

$$\lambda \in \left(-\infty, -\frac{216}{25\sqrt{15}}\right), \text{ o rădăcină reală,}$$

$$\lambda \in \left[-\frac{216}{25\sqrt{15}}, 0\right), \text{ trei rădăcini reale,}$$

$$\lambda = 0, \text{ ecuație de gradul patru cu toate rădăcinile reale,}$$

$$\lambda \in \left(0, \frac{216}{25\sqrt{15}}\right], \text{ trei rădăcini reale,}$$

$$\lambda \in \left(\frac{216}{25\sqrt{15}}, +\infty\right), \text{ o rădăcină reală.}$$

● 257. $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x$. Avem apoi $f(x) = P(x) - 14 = x^3 - 3x^2 + 12x - 28 = 0$, ecuație care are o singură rădăcină reală, cuprinsă între 2 și 3. Cum în acest interval primele două derivate sînt pozitive, în $a = 2$ aplicăm metoda corzii, iar în $b = 3$ metoda tangentei. Găsim noile aproximații $a_1 = 2,5$ și $b_1 = 2,62$.

Cum $f(2,6) = 0,5 > 0$, noul interval cu care se lucrează este $(2,5; 2,6)$ și găsim noile aproximații $a_2 = 2,5692$ și $b_2 = 2,571$. Cum $f(2,570) \cong -0,0001 < 0$ și $f(2,571) \cong 1,749 > 0$, rădăcina căutată cu trei zecimale exacte este 2,570. ● 258. $a = -10$, $b = 18$; $x_{1,2} = 1 \pm i$, $x_{3,4} = 2 \pm i\sqrt{5}$. Ecuația derivată $2x^3 + 3x^2 + 3x - 5 = 0$, are o singură rădăcină reală între 0 și $+\infty$ (șirul lui Rolle). Pentru a găsi rădăcina cu trei zecimale exacte, utilizăm metoda lui Horner. Avem

0,7	2	3	3	-5
	2	4,4	6,08	-0,744
	2	5,8	10,14	
	2	6,2		
	2			

$$f(x + 0,7) = 2x^3 + 6,2x^2 + 10,14x - 0,744.$$

0,07	2	6,2	10,14	-0,744
	2	6,34	10,584	-0,003
	2	6,48	11,037	
	2	6,62		
	2			

$$f(x + 0,77) = 2x^3 + 6,62x^2 + 11,037x - 0,003$$

0,001	2	6,62	11,037	-0,003
	2	6,622	11,046	+0,008

deci rădăcina căutată, cu trei zecimale exacte, este 0,770.

● 259. $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$. ● 260. $x \in [-2, -\sqrt{3}) \cup \cup [-1, 1] \cup (\sqrt{3}, 2]$. ● 261. $x \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$. ● 262. Se trece totul într-o singură parte și se descompune în factori. Avem $x \in (1 - \sqrt{2}; 1) \cup (1 + \sqrt{2}; 3)$. ● 263. $x \in \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$.

● 264. $x_1 = m(m-2)$, $x_2 = \frac{m-2}{m}$; 1°. $m \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup \cup (2, +\infty)$. 2°. Orice m . ● 265. $m \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \cup (2, 3]$.

● 266. 1° $K \in (-\infty; -10) \cup (15; +\infty) \Rightarrow x_1 \neq x_2 > 0$; $K \in \{-10, 3\} \Rightarrow x_1 = x_2$; $K \in (-10; 3) \Rightarrow x_1, x_2$ complexe; $K \in (3; 6) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 \neq x_2 < 0$; $K = 6 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 < 0$; $K \in (6; 15) \Rightarrow x_1 < 0$; $x_2 > 0, |x_1| > |x_2|$; $K = 15 \Rightarrow$ ec. de gr. I; $K \in (15, +\infty) \Rightarrow x_1 > 0, x_2 > 0$. $2^\circ K \in (-\infty; -22) \cup (15; +\infty)$ $3^\circ K \in (-\infty; -5] \cup \left[\frac{105}{47}; 15\right) \cup (15; +\infty)$. ● 267. $m \in (-\infty, -\sqrt{2 + \sqrt{3}}) \cup (-\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \sqrt{2 - \sqrt{3}}) \cup (\sqrt{2 + \sqrt{3}}, +\infty)$.

● 268. $1^\circ m \in [-1; 2]$; $2^\circ m \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. ● 269. Trebuie să avem $-10 \leq \frac{x+6}{x-5} \leq 10$,

deci $x \leq 4$ sau $x \geq \frac{56}{9}$. ● 270. Inecuația este satisfăcută dacă are

loc una din următoarele inecuații $x^2 + 2x - 1 > 0$ pentru $x \in (-\infty, -1)$, $x^2 - 2x - 1 < 0$ pentru $x \in (-1, 0)$, $x^2 + 2x - 1 < 0$ pentru $x \in (0, 1)$, $x^2 - 2x - 1 > 0$ pentru $x \in (1, +\infty)$.

Rezultă $x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$. ● 271. Cantitatea de sub radical trebuie să fie pozitivă, deci $-1 \leq x \leq 1$. Inecuația este satisfăcută dacă membrul doi este negativ sau nul, deci dacă $x \leq -\frac{1}{2}$. Rezultă pînă acum solu-

țiile $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$. Dacă $x > -\frac{1}{2}$, se poate ridica la pătrat

inecuația și găsim $x \in \left[-\frac{4}{5}, 0\right]$. Rezultă că $x \in [-1, 0]$. ● 272.

$x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. ● 273. $x \in (-\infty; -2]$. ● 274. Radicalul este real

pentru orice x . Dacă $x \leq \frac{3}{2}$ inecuația este satisfăcută. Dacă $x > \frac{3}{2}$

partea a doua este pozitivă, deci deducem $-3x^2 + 13x - 8 > 0$,

adevărată în $\left(\frac{13 - \sqrt{73}}{6}, \frac{13 + \sqrt{73}}{6}\right)$, deci inecuația este satis-

făcută pentru $x \in \left(-\infty, \frac{13 + \sqrt{73}}{6}\right)$. ● 275. $x \in \left[-1, \frac{4 - \sqrt{31}}{3}\right] \cup$

$\cup \left[\frac{4 + \sqrt{31}}{3}, +\infty\right)$ ● 276. $x \in (0; 1)$. ● 277. Trebuie întîi

să avem $x \in \left[-\frac{7}{2}, +\infty\right)$. Ridicînd la pătrat, găsim $2\sqrt{(x+4)(2x+7)} < -3x+7$. Membrul doi trebuie să fie pozitiv, deci $x < \frac{7}{3}$, deci pînă acum trebuie ca $x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{3}\right]$.

Ridicînd din nou la pătrat avem $x^2 - 102x - 7 > 0$, inegalitate adevărată în afara intervalului format de rădăcinile care aproximativ sînt $-0,1$ și 51 . Inecuația dată este satisfăcută dacă

$x \in \left[-\frac{7}{2}, \frac{51 - \sqrt{2629}}{2}\right)$. ● 278. Întîi trebuie ca $x \geq 8$. Cum membrul doi este pozitiv ridicînd la pătrat de două ori găsim $x < \frac{57}{4}$,

deci soluțiile inecuației sînt $x \in \left[8, \frac{57}{4}\right)$. ● 279. $x \in (6, +\infty)$.

● 280. Trebuie să avem $3x - 2 > 0$. Se trece la logaritmi în baza a^3 . Dacă $a \in (0, 1)$ funcția logaritmică este monoton descrescătoare, deci trebuie ca $x^3 < 3x - 2$, sau $(x-1)^2(x+2) < 0$, deci nu avem soluții. Dacă $a \in (1, +\infty)$, avem $x > \frac{2}{3}$. ● 281. Discriminantul

ecuației în x este negativ, deci inecuația este satisfăcută pentru orice m și orice x . ● 282. Cum trinomul $x^2 - 2x + 4$ are rădăcini complexe, inecuația se poate scrie $m > \frac{4x-3}{x^2-2x+4}$. Graficul

funcției $m = \frac{4x-3}{x^2-2x+4}$ este dat în Fig. S.4.11. Dacă $m < -1$, inecuația nu are soluții, căci ordonata curbei precedente nu poate fi mai mică decît -1 . Dacă $m = -1$, de asemenea nu avem soluții

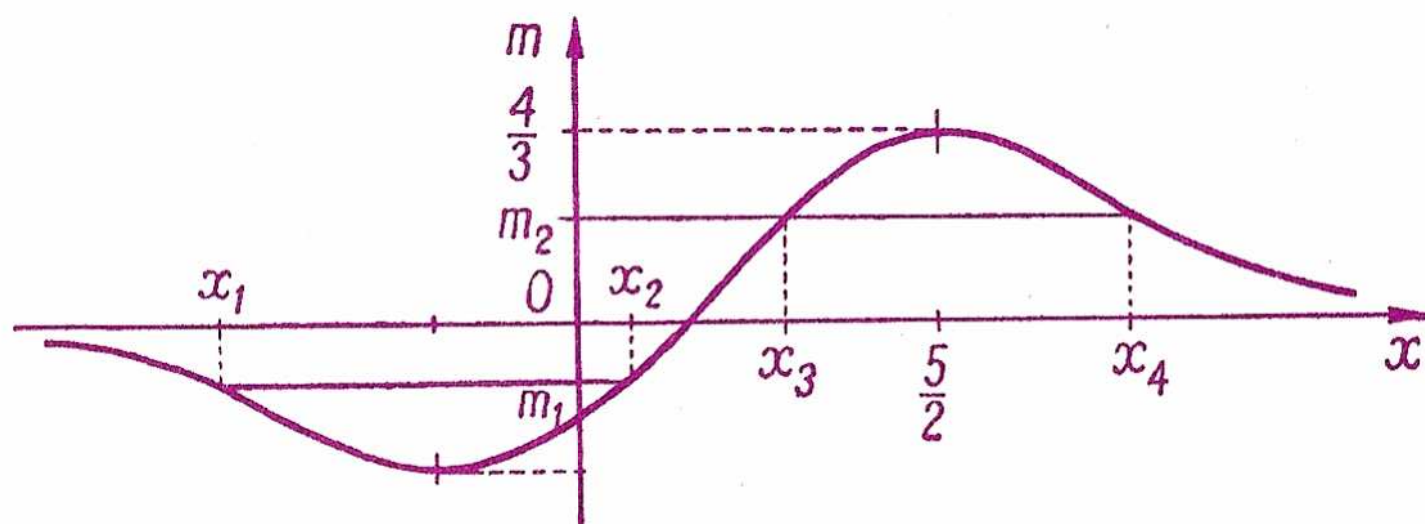


Fig. S.4.11.

căci ar trebui ca $-x^2 - 2x - 1 > 0$. Dacă $-1 < m < 0$, intersectând graficul din figură cu dreapta $m = m_1 \in (-1, 0)$, obținem două puncte, de abscise x_1 și x_2 , deci inecuația este satisfăcută de orice $x \in [x_1, x_2]$. Dacă $m = 0$, trebuie ca $x < \frac{3}{4}$. Dacă $0 < m <$

$< \frac{4}{3}$, intersectând graficul cu dreapta $m = m_2 \in (0, 1)$ obținem două puncte de abscise x_3, x_4 și inecuația este adevărată pentru orice $x \leq x_3$, sau $x \geq x_4$. Dacă $m \geq \frac{4}{3}$, inecuația este satisfăcută pentru orice x .

Cap. V. Determinanți

- 1. $-2(a^3 + b^3)$ ✓ ✓ ● 2. $-4x(x^2 + 3y^2)$ ✓ ✓ ● 3. $(a - b)(b - c)(c - a) \cdot (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$. ● 4. Determinantul este nul.
- 5. $2xyz(x - y)(y - z)(z - x)$. ● 6. Determinantul este nul.
- 7. $-3x^3(a - b)(b - c)(c - a)[(a + b + c)x^2 + 3(ab + ac + bc)x + 6abc]$. ● 8. $-2 \sin \frac{a - b}{2} \sin \frac{b - c}{2} \sin \frac{c - a}{2}$. ● 9. $(x + a + b + c)(x - a + b - c)(x - a - b + c)(x + a - b - c)$. ● 10. $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (2bc + a^2 - b^2 - c^2) \cdot (2bc - a^2 + b^2 + c^2) = (a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c) \cdot (a + b + c)$.
- 11. $\Delta = 2a^3(12a + 25)$. ● 12. $\Delta = (b - a)^{10}$.
- 13. $S = (af - be + cd)^2$. ● 14. Cum variabila θ apare numai pe primele două linii, derivata determinantului va fi o sumă de doi determinanți, obținuți derivând întâi elementele din prima linie și apoi pe cele din linia a doua, găsim $D'(\theta) = 0$. Făcând $\theta = 0$, găsim valoarea determinantului, dezvoltându-l după elementele ultimei linii $D(\theta) = D(0) = -\sin^2(\beta - \gamma) - \sin^2(\gamma - \alpha) - \sin^2(\alpha - \beta)$.
- 15. Ținem seamă că $4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$; $4m_b^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2$; $4m_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$; calculăm valoarea determinantului și obținem $\Delta = 4(a + b + c)(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)$. Notînd $a + b + c = 2p$ găsim $\Delta = -64p(p - a)(p - b)(p - c)$, deci $\Delta = -64S^2$, unde S este aria triunghiului. ● 16. Avem $D(x) = -2(x - 1)^3$ rezultat ce se poate obține, fie făcînd elemente nule pe linii sau coloane, fie arătînd că $D(1) = D'(1) = D''(1) = 0$ (derivarea determinantului se face derivînd prima linie, singura pe care se găsesc elemente ce depind de x). Avem deci $D(x) = A(x - 1)^3$ căci se vede că determinantul $D(x)$ este un polinom de gradul trei. Pentru $x = 0$, găsim $A = -2$, deci $D(x) = -2(x - 1)^3$. ● 17. Dezvoltăm după prima linie: $\cos(n + 1)\theta \sin(n + 3)\theta - \cos(n + 3)\theta \sin(n + 1)\theta - x[\cos n\theta \sin(n + 3)\theta - \cos(n + 3)\theta \sin n\theta] + x^3[\cos n\theta \sin(n + 1)\theta - \cos(n + 1)\theta \sin n\theta] = \sin 2\theta - x \sin 3\theta + x^3 \sin \theta = \sin \theta [x^3 - (3 - 4 \sin^2 \theta)x + 2 \cos \theta] = \sin \theta [x^3 + (1 - 4 \cos^2 \theta)x + 2 \cos \theta] = \sin \theta [x(x^2 - 4 \cos^2 \theta) + x + 2 \cos \theta] = \sin \theta (x + 2 \cos \theta)[x^2 - 2x \cos \theta + 1]$. Se observă deci că printre divizorii determinantului este și $1 - 2x \cos \theta + x^2$.

● 18. *Prima demonstrație.* Pentru ca D să se dividă cu d , trebuie ca D să se anuleze, dacă $ab' - a'b = 0$, deci dacă $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \lambda$. Într-adevăr, avem în acest caz

$$D = \lambda ab \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & \lambda \\ bc & bc' + \lambda bc & bc' \\ ca & \lambda ac + ac' & ac' \end{vmatrix} = \lambda ab \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ bc & bc' & bc' \\ ca & ac' & ac' \end{vmatrix} = 0.$$

Așa fiind, din cauza simetriei, D trebuie să se dividă și cu factorii $bc' - b'c$, $ca' - c'a$. Cum el este un polinom de gradul șase în cele 6 numere, avem $D = A(ab' - a'b)(bc' - b'c)(ca' - c'a)$. Făcând în determinantul D , $a = b = c = 1$, se găsește $A = 1$. *A doua demonstrație.* Înmulțind liniile determinantului respectiv cu c , a și b presupuși nenuli, avem

$$D = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & ab'c + a'bc & a'b'c \\ abc & abc' + ab'c & ab'c' \\ abc & a'bc + abc' & a'bc' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & ab'c + a'bc & a'b'c \\ 1 & abc' + ab'c & ab'c' \\ 1 & a'bc + abc' & a'bc' \end{vmatrix}$$

și se obține ușor rezultatul final. ● 19. Scăzând linia întâia din toate celelalte și apoi adăugând coloanele la prima coloană, găsim $\Delta = (-1)^{n-1} [(n-1)x - 1](x+1)^{n-1}$. ● 20. $D_n = (a+n-1) \cdot (a-1)^{n-1}$. ● 21. Dacă determinantul este de ordin impar el fiind antisimetric, este nul. Dacă n este par, scădem coloana a doua din prima și dezvoltând după prima coloană, avem $D_n = D_{n-1} + \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1}$, unde

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Scăzând coloana a doua din prima se constată că $\Delta_{n-1} = \Delta_{n-2}$. Cum $\Delta_2 = 1$, rezultă că $D_n = \Delta_{n-1} = 1$. ● 22. Se scad succesiv coloana $(n-1)$ -a din coloana n -a, coloana a $(n-2)$ -a

din coloana $(n-1)$ -a etc., prima coloană din a doua și obținem

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 - b_1 & 0 & & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & a_2 - b_2 & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_3 - b_2 & \dots & a_{n-2} - b_{n-2} & 0 \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_3 - b_2 & \dots & b_{n-1} - b_{n-2} & a_{n-1} - b_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{n-1} - b_{n-1}).$$

● 23. Scăzînd prima linie din celelalte și scoțînd de pe aceasta factorii $(x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_1)$, obținem $n-1$ linii egale, deci dacă $n > 2$, $\Delta = 0$. ● 24. Relația de recurență este $\Delta_n = x\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$; avem $\Delta_1 = x$, $\Delta_2 = x^2 - 1$, $\Delta_3 = x^3 - 2x$, $\Delta_4 = x^4 - 3x^2 + 1$.

● 25. Relația de recurență se obține considerînd coloana întîia formată din sume de cîte doi termeni: $1 + a_1, 1 + 0, \dots, 1 + 0$ și descompunînd determinantul într-o sumă de doi determinanți. Formula finală se poate stabili fie aplicînd succesiv relația de recurență, fie prin inducție completă. ● 26. $D(x, a_1, \dots, a_n)$ este un polinom $P_{n+1}(x)$ de grad $n+1$, $P_{n+1} = x^{n+1} + \dots$, care admite rădăcinile $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_{n-1} = a_{n-1}$, căci dacă în determinant se face $x = a_i (1 \leq i \leq n-1)$, două dintre liniile sale devin egale. Factorizarea se realizează scăzînd succesiv linia a 2-a din prima, a 3-a din a 2-a, $\dots$, a $(n+1)$ -a din a n -a.

$$D(x, a_1, \dots, a_n) = (x - a_1) \dots (x - a_{n-1}) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & (x - a_n) & 1 - x \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & x \end{vmatrix}$$

$= \prod_{i=1}^{n-1} (x - a_i) [x(x - a_n) + (x - 1)(a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n)]$. Cele $n-1$ rădăcini $a_1, \dots, a_{n-1}$ sînt independente de a_n ; celelalte două sînt rădăcinile trinomului $x^2 + (a_1 + \dots + a_{n-1})(x - 1) - a_n$. $\forall a_n: x_n + x_{n-1} = -(a_1 + \dots + a_{n-1})$. ● 27. Fie determinantul

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \varepsilon a_{1k_1} a_{2k_2} \dots a_{nk_n}.$$

Putem avea două cazuri. Cele două elemente nule din D se găsesc pe aceeași linie sau coloană. Să zicem că ele sînt a_{ij} și a_{ik} . Cum aceste elemente nu pot fi în același termen al determinantului, suma tuturor termenilor lui D care conțin fie pe a_{ij} , fie pe a_{ik} este $a_{ij} A_{ij} + a_{ik} A_{ik}$, deci în total $2 \cdot (n-1)!$ termeni, căci fiecare dintre complementele algebrice are $(n-1)!$ termeni. Rezultă că determinantul D are $(n-1)! \cdot (n-2)$ termeni nenuli. Dacă cele două elemente nule nu sînt pe aceeași linie sau coloană, putem presupune că ele sînt a_{11} și a_{22} . Suma tuturor termenilor din D care conțin aceste elemente este $a_{11}a_{22} \sum \varepsilon' a_{3k_3} \dots a_{nk_{k_n}}$, unde $k_3, \dots, k_n$ este o permutare oarecare a numerelor naturale $3, 4, \dots, n$. Ori această sumă are $(n-2)!$ elemente, deci D are $(n-2)!(n^2 - n - 1)$ termeni nenuli.

$$\bullet 29. \Delta = \frac{(a-b)(a-c)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} [c(1-bc-ac) - b(1-ab-bc)] =$$

$$= 0. \bullet 30. \text{ Avem } \Delta = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \text{ și apoi}$$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 3 & \sum x_j & \sum x_j^2 \\ \sum x_j & \sum x_j^2 & \sum x_j^3 \\ \sum x_j^2 & \sum x_j^3 & \sum x_j^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix} = -4p^3 - 27q^2.$$

În continuare raționamentul este cel de la ex. 72, Cap. IV.

$$\bullet 31. x = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}, \text{ dacă } ae - bd \neq 0. \bullet 32. x = 3.$$

$$\bullet 33. x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a + 8k\pi i}}{2} \text{ soluții reale dacă } k = 0, 1 -$$

$-4a \geq 0$ și două soluții complexe $\bullet 34.$ Avem $D_1 = \lambda^2 - a_0\lambda - a_1^2$. Dezvoltînd determinantul D_n , după elementele liniei întîia, avem relația de recurență $D_n = -\lambda D_{n-1} + (-1)^{n-2} a_n^2 \lambda^{n-1}$, pe care scriind-o pentru $n-1, n-2, \dots, 2$, avem

$$D_{n-1} = -\lambda D_{n-2} + (-1)^{n-3} a_{n-1}^2 \lambda^{n-2}$$

$$D_{n-2} = -\lambda D_{n-3} + (-1)^{n-4} a_{n-2}^2 \lambda^{n-3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$D_2 = -\lambda D_1 + (-1)^0 a_2^2 \lambda$$

Înmulțind relațiile cu $1, -\lambda, \lambda^2, \dots, (-1)^{n-2} \lambda^{n-2}$ și adunîndu-le, găsim $D_n = (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} [\lambda^2 - a_0\lambda - a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2] = 0$ de unde rezultă rădăcinile ecuației date.

Cap. VI. Matrice

● 1. a) $n + n - 1 = 2n - 1$; b) $L_1 = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

$L_2 = L_1 + n$; ... ; $L_n = L_1 + (n-1)n$; c) $\Sigma = n^3$; d) $I_1 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$; $I_2 = 2 + 4 + 6 + \dots + (2n-2) = n(n-1)$; ... ; $I_n = n$; $I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{n^2(n+1)}{2}$. ● 2. Să notăm cu $l_1, l_2, \dots, l_{20}$ cele mai mari

numere respectiv de pe linia 1-a, a 2-a, ..., a 20-a și cu $c_1, c_2, \dots, c_{10}$ cele mai mici numere, respectiv de pe coloanele 1-a, a 2-a, ..., a 10-a. Avem

$$X = \min \{l_1, l_2, \dots, l_{20}\}$$

$$Y = \max \{c_1, c_2, \dots, c_{10}\}$$

Să arătăm că oricare ar fi $i \in \{1, 2, \dots, 20\}$ și $j \in \{1, 2, \dots, 10\}$, rezultă $l_i \geq c_j$. Notînd cu a_{rs} numărul din tablou situat în linia r și coloana s , să presupunem că $l_i = a_{im}$, $c_j = a_{nj}$ (fig. S.6.1). Cum pe coloana j , $a_{nj} = c_j$ este cel mai mic număr, avem $c_j = a_{nj} < a_{ij}$.

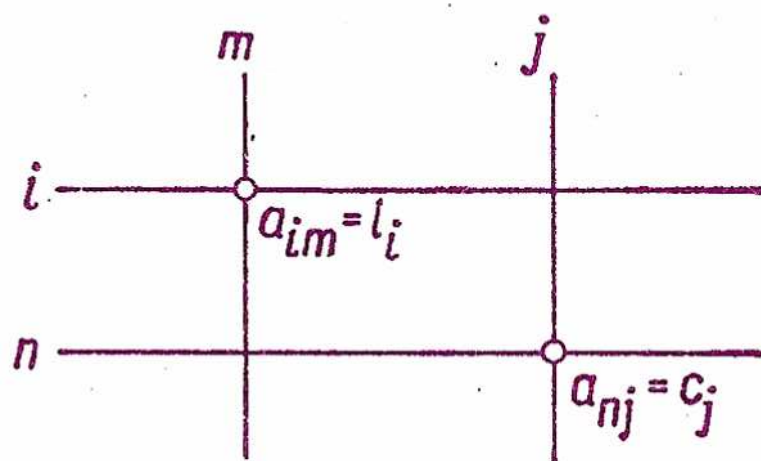


Fig. S.6.1

De asemenea pe linia i , $a_{im} = l_i$ este cel mai mare număr, deci $l_i = a_{im} > a_{ij}$; rezultă $l_i > a_{ij} > c_j$. Există posibilitatea de egalitate, atunci când $l_i = c_j$. Deducem atunci că $X \geq Y$. ● 5. Elementele de pe diagonala principală a matricei produs DD^t sînt $a_{i1}\bar{a}_{i1} + a_{i2}\bar{a}_{i2} + \dots + a_{in}\bar{a}_{in}$, $i = 1, 2, \dots, n$, deci suma pătratelor modulelor numerelor complexe $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$. Pentru ca această sumă să fie nulă, trebuie ca toate aceste module să fie nule deci $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{in} = 0$, unde $i = 1, 2, \dots, n$. Rezultă $D = [0]$. ● 6. Dacă matricele A și B sînt simetrice, avem $A = A^t$ și $B = B^t$. Pentru a arăta că produsul AB este simetric, trebuie arătat în ce condiții el este egal cu produsul $(AB)^t$. Avem $(AB)^t = B^t A^t = BA$, deci trebuie să avem $BA = AB$, deci dacă și numai dacă pro-

dusul dintre **A** și **B** este comutativ. ● 7. Notînd $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, trebuie să avem

$$\begin{cases} 2a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ b^2 + c^2 + 2d^2 = 2 \\ (b + c)(a + d) = 0 \end{cases}$$

care se poate scrie

$$\begin{cases} 2a^2 + b^2 + c^2 = 2 \\ (a - d)(a + d) = 0 \\ (b + c)(a + d) = 0. \end{cases}$$

1° Dacă $a = d$, ultima ecuație devine $2a(b + c) = 0$ și rezultă soluțiile 1₁. $a = d = 0$, $c = \pm \sqrt{2 - b^2}$, sau notînd $b = \sqrt{2} \cos \varphi$, avem $a = d = 0$ și $c = \pm \sqrt{2} \sin \varphi$; 1₂. $b = -c$, $a = d = \pm \sqrt{1 - c^2}$, sau notînd $c = \cos \varphi$ deducem soluția $b = -\cos \varphi$, $a = d = \pm \sin \varphi$. 2° Dacă $a = -d$, ultimele două ecuații sînt verificate. Rămîne ca $2a^2 + b^2 + c^2 = 2$, deci soluția este $a = -d =$

$$= \pm \sqrt{1 - \frac{b^2 + c^2}{2}}. \text{ Matricele soluții sînt}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \sin \varphi \\ \pm \sqrt{2} \sin \varphi & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm \sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & \pm \sin \varphi \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \pm \sqrt{1 - \frac{b^2 + c^2}{2}} & b \\ c & \mp \sqrt{1 - \frac{b^2 + c^2}{2}} \end{bmatrix}.$$

● 8. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \gamma + \alpha & 1 + \alpha\delta \\ 1 + \beta\gamma & \beta + \delta \end{bmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} \gamma + \beta & 1 + \alpha\gamma \\ 1 + \beta\delta & \alpha + \delta \end{bmatrix}$.

Trebuie să avem $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$, $\alpha\delta + 1 = \alpha\gamma + 1$, $\beta\gamma + 1 = \beta\delta + 1$, $\delta + \alpha = \delta + \beta$, sau $\alpha = \beta$, $\alpha(\gamma - \delta) = 0$, $\beta(\gamma - \delta) = 0$, așa că

1) $\alpha = \beta \neq 0$, $\gamma = \delta$; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & \gamma \end{bmatrix}$;

2) $\alpha = \beta = 0$; $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & \delta \end{bmatrix}$.

Matrice $A + B$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + \gamma & 1 + \alpha \\ 1 + \beta & 1 + \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & a \\ b & d \end{bmatrix}$$

unde am notat $a = \alpha + 1$, $b = \beta + 1$, $c = \gamma + 1$, $d = \delta + 1$.

$$[A + B]^2 = \begin{bmatrix} c^2 + ab & a(c + d) \\ b(c + d) & d^2 + ab \end{bmatrix}$$

$$[A + B]^3 = \begin{bmatrix} c^3 + 2abc + abd & c^2a + a^2b + ad(c + d) \\ bc(c + d) + d^2b + ab^2 & d^3 + 2abd + abc \end{bmatrix}$$

Cazul când A , B comută

$$1^\circ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & \delta \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & d \end{bmatrix}; c = \gamma + 1,$$

$$d = \delta + 1.$$

$$(A + B)^2 = \begin{bmatrix} c^2 + 1 & c + d \\ c + d & d^2 + 1 \end{bmatrix},$$

$$[A + B]^3 = \begin{bmatrix} c^3 + 2c + d & c^2 + 1 + d(c + d) \\ c(c + d) + d^2 + 1 & d^3 + 2d + c \end{bmatrix}.$$

$$2^\circ A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \gamma & 1 \\ 1 & \gamma \end{bmatrix}, A + B = \begin{bmatrix} c & a \\ a & c \end{bmatrix},$$

$$A + B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c + a + (c - a) & c + a - (c - a) \\ c + a - (c - a) & c + a + (c - a) \end{bmatrix};$$

$$[A + B]^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (c + a)^2 + (c - a)^2 & (c + a)^2 - (c - a)^2 \\ (c + a)^2 - (c - a)^2 & (c + a)^2 + (c - a)^2 \end{bmatrix};$$

$$[A + B]^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (c + a)^3 + (c - a)^3 & (c + a)^3 - (c - a)^3 \\ (c + a)^3 - (c - a)^3 & (c + a)^3 + (c - a)^3 \end{bmatrix}.$$

Se vede că

$$[A + B]^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (c + a)^n + (c - a)^n & (c + a)^n - (c - a)^n \\ (c + a)^n - (c - a)^n & (c + a)^n + (c - a)^n \end{bmatrix}.$$

● 9. Notînd $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$, trebuie să avem

$$\begin{cases} -x^2 + z^2 = -1 \\ -xy + zu = 0 \\ -y^2 + u^2 = 1. \end{cases}$$

Din ecuația a doua rezultă $\frac{x}{u} = \frac{z}{y} = \lambda$. Din prima și ultima ecuație deducem $\lambda = \pm 1$. Luînd ca necunoscută neprincipală pe y , avem soluțiile

$$\begin{bmatrix} \pm \sqrt{1+y^2} & y \\ y & \pm \sqrt{1+y^2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mp \sqrt{1+y^2} & y \\ -y & \pm \sqrt{1+y^2} \end{bmatrix},$$

care se pot scrie cu ajutorul funcțiilor hiperbolice, punînd $y = \text{sh } \varphi$,

$$\begin{bmatrix} \pm \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi \\ \text{sh } \varphi & \pm \text{ch } \varphi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mp \text{ch } \varphi & \text{sh } \varphi \\ -\text{sh } \varphi & \pm \text{ch } \varphi \end{bmatrix}.$$

● 11. Trebuie să avem

$$\begin{cases} (\alpha - a)x + \gamma y = 0 \\ \beta x + (\delta - a)y = 0 \\ (\alpha - d)u + \gamma v = 0 \\ \beta u + (\delta - d)v = 0. \end{cases}$$

Pentru ca să avem soluții diferite de soluția banală pentru cele două sisteme trebuie ca

$$a^2 - (\alpha + \delta)a + \alpha\delta - \beta\gamma = 0$$

$$d^2 - (\alpha + \delta)d + \alpha\delta - \beta\gamma = 0.$$

Toate soluțiile sînt

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & -\frac{\alpha - a}{\gamma} x \\ u & -\frac{\alpha - d}{\gamma} u \end{bmatrix}$$

● 12. 1° Notînd

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

pentru ca $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$, trebuie să avem $a^2 + bc = 1$, $b(a + d) = 0$, $c(a + d) = 0$, $bc + d^2 = 1$. Examinînd pe rînd cazurile $b = 0$, $c = 0$ și $a + d = 0$, găsim matricele

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}.$$

2° Matricele $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ se obțin din ultima matrice de mai sus, pentru $a = 0$ și $b = 1$, respectiv $a = 0$ și $b = -i$. 3° Egalitatea se verifică deoarece $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$, $\mathbf{AC} = -\mathbf{CA}$, $\mathbf{BC} = -\mathbf{CB}$ și $(\lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B} + \nu\mathbf{C})^2 = \lambda^2\mathbf{A}^2 + \mu^2\mathbf{B}^2 + \nu^2\mathbf{C}^2 + \lambda\mu(\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) + \mu\nu(\mathbf{BC} + \mathbf{CA}) + \nu\lambda(\mathbf{CA} + \mathbf{AC}) = (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\mathbf{I}$. ● 13. Notînd

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

trebuie să avem

$$\begin{bmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + tz & yz + t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix},$$

deci trebuie să avem

$$\begin{cases} x^2 + yz = x \\ xy + yt = y \\ xz + tz = z \\ yz + t^2 = t. \end{cases}$$

Presupunînd că $y \neq 0$, sistemul se reduce la

$$\begin{cases} x^2 - x + yz = 0 \\ x + t = 1 \end{cases}$$

și presupunînd că x și y sînt arbitrari, avem

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{x - x^2}{y} & 1 - x \end{bmatrix}.$$

Dacă $y = 0$, avem următoarele cazuri particulare

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luînd $x = \cos^2 \frac{u}{2}$ și $y = \cos \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} = \frac{1}{2} \sin u$ se obține matricea

$\mathbf{M}(u)$. Derivata ei se obține derivînd toate elementele, deci

$$\mathbf{M}'(u) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \sin u & \frac{1}{2} \cos u \\ \frac{1}{2} \cos u & \frac{1}{2} \sin u \end{bmatrix}$$

și apoi

$$\mathbf{M}(u) \mathbf{M}'(u) = \frac{1}{4} \sin u.$$

● 14. Notînd

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

avem soluțiile

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{bmatrix}, \text{ dacă } b \neq 0 \text{ și}$$

$$\begin{bmatrix} a & -\frac{a^2}{c} \\ c & -a \end{bmatrix} \text{ dacă } c \neq 0.$$

● 15. Notînd cu $|A|$ determinantul matricei A , produsul cerut este

$$P = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| & 0 \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Trecînd la determinanți avem

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot |A| = a_{nn} |A|^{n-1},$$

prin urmare

$$|A_{nn}^*| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & \dots & A_{n-1,n} \end{vmatrix} = a_{nn} |A|^{n-2},$$

căci $|A|$ este presupus nenul, care este valoarea complementului algebric corespunzător elementului din linia și coloana de rang n , din determinantul adjunct al matricei A . Pentru a obține complementul algebric $|A_{ik}^*|$, înlocuim linia i din determinantul adjunct cu elemente nule, afară de elementul din linia i și coloana k ce se înlocuiește cu unitatea, și cu matricea astfel obținută se face produsul cu matricea transpusă a matricei date. Găsim

$$|A_{ik}^*| = (-1)^{i+k} a_{ik} |A|^{n-2},$$

pentru orice i și k . ● 16. Prin inducție completă se arată că

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{bmatrix}.$$

● 17. Avem

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se vede că singurul element din B^n care trebuie determinat este cel din coloana întâia și linia a treia. Notînd

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ x_n & n & 1 \end{bmatrix}$$

trebuie să avem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n-1 & 1 & 0 \\ x_{n-1} & n-1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ x_n & n & 1 \end{bmatrix},$$

de unde $x_n = x_{n-1} + n$. Scriind egalitatea pentru $n-1, n-2, \dots, \dots, 3, 2$ avem

$$x_{n-1} = x_{n-2} + n - 1$$

$$\dots \dots$$

$$x_3 = x_2 + 3$$

$$x_2 = x_1 + 2.$$

Cum $x_1 = 1$, găsim

$$x_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

așa că

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 \end{bmatrix}.$$

● 18. Avem $A^2 = I$, deci $A^{2m} = I$ și $A^{2m+1} = A$.

● 19.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & 1 \dots 1 \\ \dots & \dots \\ 1 & 1 \dots 1 \end{bmatrix}, \quad U^2 = \begin{bmatrix} p & p \dots p \\ p & p \dots p \\ \dots & \dots \\ p & p \dots p \end{bmatrix},$$

$$U^3 = \begin{bmatrix} p^2 & p^2 \dots p^2 \\ p^2 & p^2 \dots p^2 \\ \dots & \dots \\ p^2 & p^2 \dots p^2 \end{bmatrix}, \dots, \quad U^{n+1} = \begin{bmatrix} p^n & p^n \dots p^n \\ p^n & p^n \dots p^n \\ \dots & \dots \\ p^n & p^n \dots p^n \end{bmatrix}$$

● 20. Trebuie să avem

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}.$$

Se găsește $y = -2z$, $x = -2z + u$ deci matricele permutabile cu A sînt

$$\begin{bmatrix} -2z + u & -2z \\ z & u \end{bmatrix}.$$

● 21. Se calculează urma matricei $XY - YX$ și se arată că este nulă, în timp ce urma matricei I_n este egală cu n . Rezultă că cele două matrice nu pot fi egale.

● 22.

	I	-I	A	-A	B	-B	C	-C
I	I	-I	A	-A	B	-B	C	-C
-I	-I	I	-A	A	-B	B	-C	C
A	A	-A	-I	I	C	-C	-B	B
-A	-A	A	I	-I	-C	C	B	-B
B	B	-B	-C	C	-I	I	A	-A
-B	-B	B	C	-C	I	-I	-A	A
C	C	-C	B	-B	-A	A	-I	I
-C	-C	C	-B	B	A	-A	I	-I

Mulțimea matrice-
lor date este:

- peste tot definită,
- asociativă,
- are elementul neu-
tru I ,
- orice element admi-
te un simetric. Ace-
stea sînt în ordine,
 I , $-I$, $-A$, $-B$, B ,
 $-C$ și C , deci ea
formează un grup.

● 23. Notînd

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

trebuie să avem

$$\begin{cases} bc + a^2 - 4a + 3 = 0 \\ b(a + d - 4) = 0 \\ c(a + d - 4) = 0 \\ bc + d^2 - 4d + 3 = 0. \end{cases}$$

Examinînd cazurile $b = c = 0$; $b = 0, c \neq 0$; $b \neq 0, c = 0$ și $b \neq 0, c \neq 0$, găsim soluțiile

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \pm \sqrt{1-bc} & b \\ c & 2 \mp \sqrt{1-bc} \end{bmatrix}.$$

● 24. Avem

$$|M| = \sin 2\theta \sin 4\theta \sin 6\theta + 2 \sin 3\theta \sin 4\theta \sin 5\theta - \\ - \sin^3 4\theta - \sin^2 3\theta \sin 6\theta - \sin 2\theta \sin^2 5\theta.$$

Dar ●

$$\sin 2\theta (\sin 4\theta \sin 6\theta - \sin^2 5\theta) = -\sin 2\theta \sin^2 \theta$$

$$\sin 4\theta (\sin 3\theta \sin 5\theta - \sin^2 4\theta) = -\sin 4\theta \sin^2 \theta$$

$$\sin 3\theta (\sin 4\theta \sin 5\theta - \sin 3\theta \sin 6\theta) = \sin \theta \sin 2\theta \sin 3\theta$$

și rezultă $|M| = 0$, deci matricea M este singulară. Forma pătratică este $\varphi(x, y, z) \equiv x^2 \sin 2\theta + y^2 \sin 4\theta + z^2 \sin 6\theta + 2xy \sin 3\theta + 2xz \sin 4\theta + 2yz \sin 5\theta$. Ordonînd după variabila x , găsim

$$x = \frac{-y \sin 3\theta - z \sin 4\theta \pm (y \sin \theta + z \sin 2\theta)}{\sin 2\theta}$$

și cele două rădăcini sînt

$$x_1 = -\frac{y \cos 2\theta + z \cos 3\theta}{\cos \theta}, \quad x_2 = -\frac{y \sin 2\theta + z \sin 3\theta}{\sin \theta}$$

deci

$$\varphi(x, y, z) = 2(x \cos \theta + y \cos 2\theta + z \cos 3\theta)(x \sin \theta + y \sin 2\theta + z \sin 3\theta).$$

● 25. 4; 4; 2; 3; 5. ● 26. Avem

$$A = \begin{bmatrix} r_1 s_1 & r_1 s_2 & \dots & r_1 s_n \\ r_2 s_1 & r_2 s_2 & \dots & r_2 s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n s_1 & r_n s_2 & \dots & r_n s_n \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

dacă toate numerele r_i și s_j sînt nenule. Dacă însă toate aceste numere sînt nule, rangul este zero (toate elementele matricei sînt nule).

2° Utilizînd matricele rațional echivalente ca mai sus, se urmează drumul invers. ● 27. 1° Rangul matricei M_1 este $r + s$. În adevăr, din matricea M_1 luînd liniile și coloanele care în A , respectiv în B , dau cîte un determinant nenul de ordinul r , respectiv s , la intersecția

lor se găsește un determinant nenul de ordinul n (valoarea lui este egală cu produsul valorilor celor doi determinanți nenuli din A și B). Pe de altă parte, orice determinant de ordinul $r + s + k$ ($k \geq 1$) ce se poate forma din M_1 este nul, căci din cauza blocurilor nule, el trebuie să fie egal cu produsul unui determinant din A cu un determinant din B . Dar cel puțin unul din aceștia trebuie să aibe ordinul mai mare decât r , dacă este format din matricea A , sau decât s , dacă este format din matricea B , ceea ce nu se poate. 2° Rangul minimal este $\max \{r, s\}$. Fie acesta, pentru fixarea ideilor, egal cu s . În adevăr, din matricea M_2 este suficient să luăm acele linii și coloane la intersecția cărora în B se găsește un determinant nenul de ordinul s . Să arătăm acum că matricea M_2 nu poate avea rangul R mai mare decât $r + s$, cu condiția ca R să nu depășească dimensiunile matricei. Să presupunem că din matricea M_2 putem forma un determinant nenul de ordin $R > r + s$, ale cărui elemente se găsesc în r_1 coloane din A și r_2 coloane din B , deci că matricea lui se poate scrie ca suma $A_1 + B_1$ de dimensiuni R/r_1 și R/r_2 . (Fig. S.6.2). Efectuând operațiile de găsire a rangului, lucrând numai

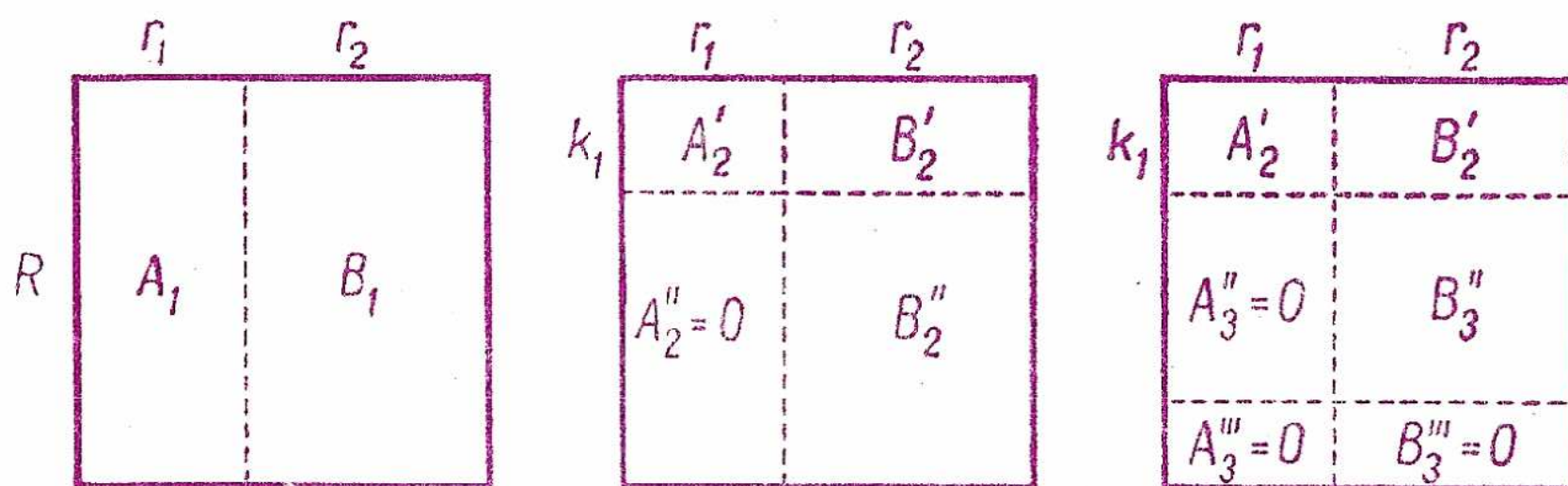


Fig. S.6.2.

pe linii, și alegînd pivoți numai din elementele lui A_1 , matricea se transformă într-o matrice cu patru blocuri, pe prima coloană fiind matricea A'_2 formată cu liniile din care s-au luat cei k_1 pivoți și matricea nulă A''_2 . Liniile matricei B_1 s-au schimbat la fel cu cele din A_1 , obținînd blocurile B'_2 și B''_2 , primul avînd aceleași linii ca și A'_2 . Asupra liniilor lui $A'_2 + B'_2$ efectuăm operațiile de găsire a rangului lucrînd numai pe linii și alegînd pivoți numai din B'_2 . Se ajunge în felul acesta la o matrice cu șase blocuri, dintre care B''_3 conține liniile din care s-au luat cei k_2 pivoți, iar matricele A''_3 , A'''_3 și B'''_3 sînt matrice nule. Rezultă acum că matricea $A_1 + B_1$ are rangul $k_1 + k_2$. Dar A_1 face parte din A , deci $k_1 \leq r_1 \leq r$, iar B'_2 face parte din B_1 , deci $k_2 \leq r_2 \leq s$. Înseamnă că $R = r_1 +$

$+r_2 \leq r+s$, deci matricea $A+B$ nu poate avea rangul mai mare decât $r+s$.

● 28.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

● 29. Dezvoltînd după coloana întâia determinantul matricei A_n , avem relația de recurență $|A_n| = |A_{n-1}| - 1$ de unde se obține $|A_n| = -n$. Se constată apoi că

$$A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad A_3^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

deducem că matricea inversă trebuie să fie

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \end{bmatrix},$$

ceea ce se verifică, deoarece $A_n A_n^{-1} = I_n$.

● 30.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

● 31. Notînd

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b'_1 & b''_1 \\ b_2 & b'_2 & b''_2 \\ b_3 & b'_3 & b''_3 \end{bmatrix},$$

avem

$$1^\circ \begin{cases} b_i + 2b'_i - b'' = a_i \\ 2b_i - b' + 2b''_i = a'_i \\ -b_i - b' = a''_i \end{cases}, \quad i=1, 2, 3,$$

unde a_i, a'_i, a'' sînt elementele din linia de rang i din matricea $\mathbf{A}$.

Cum $|\mathbf{C}| = 1$, trebuiesc rezolvate trei sisteme Cramer și avem o singură soluție

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$2^\circ \begin{cases} b_i + 2b'_i - 5b''_i = a_i \\ 2b_i - b'_i = a'_i \\ -b_i - b'_i + 3b''_i = a''_i \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Cum $|\mathbf{C}| = 0$, putem avea sau o infinitate de soluții, sau nici una, după cum cei trei determinanți caracteristici sînt nuli. Cum

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \text{ și pentru } i = 1, \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

sistemul este incompatibil, deci nu există nici o matrice $\mathbf{B}$, așa ca $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$. În adevăr, din relația precedentă avem $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{C}|$ și cum $|\mathbf{C}| = 0$, trebuie ca $|\mathbf{A}| = 0$, ceea ce aici nu este îndeplinit. Din exemplele următoare se va vedea că aceasta este numai o condiție *necesară* pentru existența matricei $\mathbf{B}$ cînd matricea $\mathbf{C}$ este singulară. 3° Sistemul din 2° are aceeași matrice singulară $\mathbf{C}$. Matricea $\mathbf{A}$ este și ea singulară, deci condiția necesară de mai sus este îndeplinită.

Cu același determinant principal ca mai sus, avem determinanții caracteristici

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

deci cele trei sisteme de ecuații au fiecare câte o infinitate de soluții,
deci avem o infinitate de matrice

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} b_1 & 2b_1 - 1 & b_1 \\ b_2 & 2b_2 - 1 & b_2 - 2 \\ b_3 & 2b_3 - 3 & b_3 - 2 \end{vmatrix}.$$

4° Condiția necesară $|A| = 0$ este îndeplinită, dar două dintre cele trei sisteme sînt incompatibile, deci nu există matrice B .

● 32. Notind

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix},$$

găsim o infinitate de soluții

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 + x_3 & y_3 & 1 - z_3 \\ 3 - 2x_3 & 2 - 2y_3 & 1 - 2z_3 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}.$$

Explicația constă în aceea că matricea B este singulară. ● 33. Matricea B trebuie să fie de ordinul $n + 1$. Notînd elementele ei cu $b_{i,k}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n + 1$), acestea trebuie să verifice sistemul

$$\begin{cases} a_n b_{11} + a_{n-1} b_{12} + \dots + a_0 b_{1,n+1} = 0 \\ a_n b_{21} + a_{n-1} b_{22} + \dots + a_0 b_{2,n+1} = na_n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n b_{n1} + a_{n-1} b_{n2} + \dots + a_0 b_{n,n+1} = 2a_2 \\ a_n b_{n+1,1} + a_{n-1} b_{n+1,2} + \dots + a_0 b_{n+1,n+1} = a_1. \end{cases}$$

Avem $n + 1$ ecuații cu $(n + 1)^2$ necunoscute b_{ik} . Înseamnă că avem $(n + 1)^2 - (n + 1) = n(n + 1)$ necunoscute neprincipale, pe care am putea să le luăm nule. Ca matricea A să fie nesară, trebuie ca în fiecare ecuație să rămână cel puțin o necunoscută b_{ik} nenulă, iar în prima ecuație (care este omogenă) două asemenea necunoscute.

Inseamnă că putem avea cel mult $n(n+1) - 1$ necunoscute nule. Pentru ca matricea $\mathbf{B}$ să fie nesingulară și expresia elementelor nenule cât mai simplă, luăm $b_{21} = n$, $b_{32} = n - 1$, ..., $b_{n,n-1} = 2$, $b_{n+1,n} = 1$, iar din prima ecuație $b_{11} = a_0$, $b_{1,n+1} = -a_n$, restul elementelor le luăm nule. Avem atunci

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_n \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{B}| = (-1)^{n+1} a_n n! \neq 0.$$

Pentru $n = 2$, avem

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} a_0^2 & -a_2 & -a_0 a_2 \\ 2a_0 & 0 & -2a_2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^3 = \begin{bmatrix} a_0^3 - 2a_2 & -a_0 a_2 & -a_0^2 a_2 \\ 2a_0^2 & -2a_2 & -2a_0 a_2 \\ 2a_2 & 0 & -2a_2 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{B}^2| = 4a_2^2, \quad |\mathbf{B}^3| = -8a_2^3.$$

● 34. Notînd $11^x = u$, $11^z = v$, $5^{\frac{y}{2}} = t$, obținem sistemul

$$\begin{cases} u + 2t^2 = 171 \\ v + 2t = 21 \\ \frac{u}{v} + t = 16. \end{cases}$$

Eliminînd variabilele u și v se obține ecuația $4t^2 - 53t + 165 = 0$, cu rădăcinile 5 și $\frac{33}{4}$. Se obțin soluțiile

1° $x = 2, y = 2, z = 1$, caz în care $\det \mathbf{M} = -18$.

2° $x = \frac{\ln 279 - \ln 8}{\ln 9 - \ln 2}, y = 2 \frac{\ln 33 - \ln 4}{\ln 5}, z = \frac{\ln 9 - \ln 2}{\ln 11}$ și se poate calcula apoi determinantul produsului celor două matrice.

Cap. VII. Sisteme de ecuații

- 1. $(3, 1); \left(\frac{1}{3}, -\frac{13}{3}\right)$. • 2. $\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a-b}$. • 3. $x = \frac{7}{13}z + \frac{38}{13}$,
 $y = \frac{22}{13}z - \frac{5}{13}$. • 4. $x = 0,301030, y = 0,8450980, z = 0,9542425$.
 • 5. $x = 7, y = -1$, numai dacă $a = 3$ și $b = 4$. • 6. Sistemul este compatibil și are soluția $\left(\frac{17}{5}, \frac{1}{5}, 0\right)$. • 7. Pentru calculul de-

terminantului coeficienților necunoscutelor, vom scădea elementele primei coloane din celelalte și apoi vom scoate factori pe linii și coloane.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + \lambda_1} & \frac{1}{a_2 + \lambda_1} & \cdots & \frac{1}{a_n + \lambda_1} \\ \frac{1}{a_1 + \lambda_2} & \frac{1}{a_2 + \lambda_2} & \cdots & \frac{1}{a_n + \lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_1 + \lambda_n} & \frac{1}{a_2 + \lambda_n} & \cdots & \frac{1}{a_n + \lambda_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \cdots (a_1 - a_n)}{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2) \cdots (a_1 + \lambda_n)} \Delta_1$$

Pentru determinantul Δ_1 , de mai jos, scădem elementele primei linii din celelalte linii și scoatem factori comuni pe linii și coloane.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a_2 + \lambda_1} & \cdots & \frac{1}{a_n + \lambda_1} \\ 1 & \frac{1}{a_2 + \lambda_2} & \cdots & \frac{1}{a_n + \lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{a_2 + \lambda_n} & \cdots & \frac{1}{a_n + \lambda_n} \end{vmatrix} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \cdots (\lambda_1 - \lambda_n)}{(a_2 + \lambda_1)(a_3 + \lambda_1) \cdots (a_n + \lambda_1)} \Delta_2$$

unde

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2 + \lambda_2} & \cdots & \frac{1}{a_n + \lambda_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_2 + \lambda_n} & \cdots & \frac{1}{a_n + \lambda_n} \end{vmatrix}.$$

Rezultă deci că

$$\Delta = \frac{V(\lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_1) V(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + \lambda_j)},$$

unde $V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ este determinantul Vandermonde al numerelor $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, iar la numitor avem produsul tuturor numerelor de forma $a_i + \lambda_j$. Pentru găsirea necunoscutei, observăm că în formulele lui Cramer determinantul D_1 de la numărător este Δ_1 . Prin urmare

$$x_1 = \frac{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2) \dots (a_1 + \lambda_n)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)}$$

și din cauza simetriei sistemului, avem

$$x_s = \frac{(a_s + \lambda_1)(a_s + \lambda_2) \dots (a_s + \lambda_n)}{(a_s - a_1) \dots (a_s - a_{s-1})(a_s - a_{s+1}) \dots (a_s - a_n)}$$

pentru $s = 1, 2, \dots, n$. ● 8. $x = \frac{\alpha(3 + 2\alpha)}{(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 2)}$;

$y = \frac{\beta(3 + 2\beta)}{(\beta - 1)(\beta^2 + \beta + 2)}$; $z = \frac{\gamma(3 + 2\gamma)}{(\gamma - 1)(\gamma^2 + \gamma + 2)}$. ● 9. Rangul sistemului este trei. Soluția este $x = t, y = 0, z = 0$.

● 10. $\frac{x}{-5} = \frac{y}{5} = \frac{z}{-10} = \frac{t}{-5}$. ● 11. $x = 2, y = 2(a - 1), z = 2a$.

● 12. $x = K \sin A \sin B$; $y = K \sin B \sin C$; $z = K \sin^2 C$, K arbitrar. ● 13. $x = \frac{(d - b)(b - c)(c - d)}{(a - b)(b - c)(c - d)}$;

$y = \frac{(a - d)(d - c)(c - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)}$; $z = \frac{(a - b)(b - d)(d - a)}{(a - b)(b - c)(c - a)}$.

● 14. $x = -abc$, $y = ab + ac + bc$, $z = -(a + b + c)$. ● 15. $x = -abc(a + b + c)$, $y = -(a + b)(b + c)(c + a)$, $z = -(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)$. ● 16. $x = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$; $y = \frac{-1}{(a-b)(b-c)}$; $z = \frac{1}{(a-c)(b-c)}$. ● 17. $x = 1$; $y = 0$; $z = 0$. ● 18. Determinantul coeficienților necunoscutelor este determinantul Vandermonde al numerelor $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $D = V\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) =$

$$= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{a^2 b^2 c^2}. \text{ Soluția este } x = \frac{a^2(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)(a+b+c)},$$

$$y = \frac{b^2(b+a)(b+c)}{(b-a)(b-c)(a+b+c)}, z = \frac{c^2(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)(a+b+c)}.$$

● 19.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & \operatorname{ch} a & \operatorname{ch} 2a \\ \operatorname{ch} a & \operatorname{ch} 2a & \operatorname{ch} 3a \\ \operatorname{ch} 2a & \operatorname{ch} 3a & \operatorname{ch} 4a \end{vmatrix} = \operatorname{sh}^2 a, \text{ deci presupunem } a \neq 0.$$

$D_x = 0$, $D_y = -\operatorname{sh}^2 a$, $D_z = 2 \operatorname{sh}^2 a \operatorname{ch} a$. Soluția sistemului este $x = 0$, $y = -1$, $z = 2 \operatorname{ch} a$.

● 20. $x = \frac{(a + 3b + 2c + 7d)\lambda - a - 3b + 3c - 2d - 5e}{\lambda - 1}$,

$$y = \frac{(b + c + 2d)\lambda - b - d - e}{\lambda - 1}, z = \frac{(c + d)\lambda - e}{\lambda - 1}, t = \frac{d\lambda + c - e}{\lambda - 1},$$

$$u = \frac{c + d - e}{\lambda - 1}.$$

● 21. Din primele trei rapoarte egale și din ultima ecuație, avem $k = 2$. Rezultă apoi $x_k = 2^{n-k} x_n$ și din penultima ecuație $x_n = \frac{15}{2^n - 1}$. Apoi $x_k = \frac{15 \cdot 2^{n-k}}{2^n - 1}$ $k = 1, 2, \dots, n$.

● 22. Prima ecuație se poate scrie $\frac{2}{x+y-1} + \frac{5}{y+z-3} - \frac{5}{z+x-2} = \frac{1}{2}$; $x = 2$; $y = 3$; $z = 4$. ● 23. Se pune $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$. Găsim soluțiile $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ și $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$. ● 24. $x = 4$; $y = 3$;

$z = -6$. ● 25. Se iau ca necunoscute $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$. $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

● 26. $x = m - 1, y = m, z = m + 1$. ● 27. Primele trei rapoarte egale sînt egale și cu $\frac{x + y + z}{2(x + y + z)} = \frac{1}{2}$. Găsim $x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{2},$

$z = -\frac{1}{6}$. ● 28. Notînd $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v, \frac{1}{z} = w$, ajungem la un

sistem de ecuații liniare. $x = (a - b)(a - c), y = (a - b)(c - b) = (b - a)(b - c), z = (a - c)(b - c) = (c - a)(c - b)$. ● 29. a)

$x = \frac{m - 1}{m + 2} = 1 - \frac{3}{m + 2}; y = \frac{m - 2}{m + 1} = 1 - \frac{3}{m + 1}$. b) $m \in$

$\in (-2; -1) \cup (1; 2)$. c) $m \in \{-5; -4; -2; -1; 1; 2\}$.

● 30. 1° $a \notin \left\{-7; \frac{1}{5}\right\}$, 2° $a = \frac{1}{5}$ și $b = -\frac{34}{15}$, sau $a = -7$ și

$b = -\frac{22}{3}$. 3° $a \notin \left\{-7; \frac{1}{5}\right\}$, soluția unică $x = \frac{3a + 1}{3(5a - 1)}$;

$y = \frac{a + 3}{1 - 5a}$; $a = \frac{1}{5}$ incompatibil; $a = -7$ nedeterminare.

● 31. $m \neq \pm 2$, soluția unică, $x = -\frac{m + 4}{m + 2}; y = \frac{m^2 + 2m - 1}{m + 2}$.

$m = 2$, o infinitate de soluții,

$m = -2$, incompatibilitate.

● 32. $m \neq \left\{1, 2, \frac{19}{11}\right\}$ soluția unică: $x = \frac{4}{m - 1}; y = -\frac{3}{m - 2}$.

$m \in \left\{1, 2, \frac{19}{11}\right\}$ o infinitate de soluții.

● 33. $K \neq 3, K \neq 1$, soluția unică $x = \frac{5K - 7}{K - 3}, y = \frac{3(K - 1)}{3 - K}$,

$K = 3$, incompatibilitate; $K = 1$, o infinitate de soluții.

● 34. $\lambda \notin \{-2; 1\}$ soluție unică: $x = -\frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}$; $y = -\frac{1}{\lambda + 2}$

$z = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda + 2}$; $\lambda = -2$ sistemul este incompatibil; $\lambda = 1$ avem o

infinitate de soluții. ● 35. $\lambda \neq \{1, 2\}$ soluție unică; $\lambda = 1$, trebuie ca $a = b = c$; $\lambda = 2$, dacă $c \neq \frac{a + b}{3}$ sistemul este incompatibil,

iar dacă $c = \frac{a + b}{3}$ sistemul are o infinitate de soluții. ● 36. De-

terminantul coeficienților necunoscutelor este $D = -m(m^2 - 3m + 4)$. Dacă $D \neq 0$, sistemul are o singură soluție. Dacă $m = 0$ sistemul este compatibil dacă și numai dacă $a - b + c - d = 0$, caz în care avem o infinitate de soluții. ● 37. Determinantul coeficienților necunoscutelor este $D = (m + 3)(m - 1)^2$. Dacă $D \neq 0$, avem o singură soluție. Dacă $m = -3$, sistemul este compatibil dacă și numai dacă $a + b + c + d = 0$. Dacă $m = 1$, pentru compatibilitate trebuie să avem $a = b = c = d$.

● 38. $m \neq \{-2, -1, 2\}$ soluția unică $x = \frac{2m}{m + 1}$, $y = -(m - 1)$;

$z = \frac{m^2 + 1}{m + 1}$; $m = \pm 2$, o infinitate de soluții; $m = -1$ incom-

patibilitate. ● 39. Trebuie să avem $\lambda = 2$ sau $\lambda = \frac{1}{2}$, și soluțiile sînt

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{7}z \\ y_1 = -\frac{1}{7}z \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}z \\ y_2 = -z \end{cases}$$

● 40. Determinantul coeficienților necunoscutelor este $D = (1 - \alpha\bar{\alpha})^2$. Cum $\alpha\bar{\alpha}$ este pătratul modulului numărului complex, rezultă că sistemul dat are numai soluția banală dacă modulul numărului complex este diferit de unitate. Dacă $|\alpha| = 1$, cele trei ecuații se reduc, la oricare dintre ele, și avem o dublă infinitate de soluții.

● 41. Sistemul este compatibil dacă $M(\alpha, \beta)$ se află pe parabola $\beta = 5\alpha^2 + \alpha + 2$. ● 42. Determinantul coeficienților sistemului este $D = 2ab(a + b)$. Dacă $D \neq 0$, avem numai soluția banală. Dacă $a = 0$, rezultă $x = -y = z$. Dacă $b = 0$, rezultă $x = y = -z$. Dacă $a + b = 0$, rezultă $x = y = z$. ● 43. Determinantul coeficien-

ților necunoscutelor este $D = (\alpha - \beta^2)(\alpha^2 - 2)$. Dacă $D \neq 0$, avem numai soluția banală. Dacă $D = 0$ (deci fie că $\alpha - \beta^2 = 0$, fie $\alpha^2 - 2 = 0$), rangul sistemului este doi și de fiecare dată avem o infinitate de soluții. Dacă $M(\alpha, \beta)$ este un punct din plan, sistemul are numai soluția banală, dacă punctul M nu se găsește pe parabola $\alpha - \beta^2 = 0$ sau pe una din dreptele $\alpha = \sqrt{2}$, $\alpha = -\sqrt{2}$. În caz contrar avem o infinitate de soluții. ● 44. Determinantul coeficienților necunoscutelor este $D = (1 - \alpha)(1 - \beta)$. Dacă $D \neq 0$, nu avem decât soluția banală. Dacă $D = 0$ (deci fie că $\alpha = 1$, fie că $\beta = 1$, fie că $\alpha = \beta = 1$) rangul sistemului este doi, deci avem o infinitate de soluții. În adevăr, dacă $\alpha = 1$, avem soluțiile $x = 0$, $y = -z$. Dacă $\beta = 1$, soluțiile sînt date de primele două ecuații și anume $x = -\frac{2 - 2\alpha}{2 - \alpha^2}z$, $y = -\frac{2 - \alpha}{2 - \alpha^2}z$, dacă $\alpha \neq \pm\sqrt{2}$, sau

$$x = -\frac{2 - 2\alpha}{\alpha - 2}y, \quad z = \frac{2 - \alpha^2}{\alpha - 2}y, \quad \text{dacă } \alpha \neq 2. \quad \bullet 45.$$

Determinantul coeficienților necunoscutelor este $D = -b(a - 1)$. Dacă $D \neq 0$, avem un sistem Cramer. Dacă $D = 0$ și $a = 1$, sistemul este compatibil numai dacă $b = \frac{1}{2}$. Dacă $D = 0$ și $b = 0$ sistemul este incompatibil.

● 46. Avem

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc),$$

al doilea factor nu se mai poate descompune în factori liniari de gradul întâi, căci ecuația $a^2 - a(b + c) + b^2 + c^2 - bc = 0$ are rădăcinile complexe $a = \frac{b + c \pm \sqrt{3} \sqrt{-(b - c)^2}}{2}$. Dacă $D \neq 0$,

deci dacă $a + b + c \neq 0$, avem soluția $x = 0$, $y = z = 1$. Dacă $a + b + c = 0$, și dacă $ac - b^2 \neq 0$, soluția este dată de sistemul

$$\begin{cases} ax + by = -cz + b + c \\ bx + cy = -az + c + a \end{cases}$$

deci

$$\begin{cases} x = \frac{(ab - c^2)z + c^2 - ab}{ac - b^2} \\ y = \frac{(bc - a^2)z + a^2 - bc}{ac - b^2}. \end{cases}$$

Determinantul caracteristic este chiar $D = 0$. Nu putem avea rangul unu, căci ar trebui ca $ac - b^2 = 0$, $a^2 - bc = 0$, $ab - c^2 = 0$, deci $a = b = c$ ori $a + b + c = 0$ deci $a = b = c = 0$. ● 47. Din primele două ecuații avem $x = -1 + y$, $z = 1 + y$. Ultima ecuație devine $y^2 - 1 = 0$, deci soluțiile sînt $(0, 1, 2)$ și $(-2, -1, 0)$.

● 48. $x = \frac{-25 \pm \sqrt{165}}{10}$; $y = \frac{-10 \pm \sqrt{165}}{5}$; $z = \frac{5 \pm 3\sqrt{165}}{10}$.

● 49. $(1, 0); \left(-\frac{7}{2}, -\frac{9}{14}\right)$. ● 50. $x \in \left\{-\frac{2}{3}; 1\right\}$, $y \in \left\{-1; \frac{6}{5}\right\}$.

● 51. Din prima și ultima ecuație se exprimă $y + z$ și yz în funcție de x . $(4, 3, 6)$, $(4, 6, 3)$, $(9, 2 - i\sqrt{3}, 2 + i\sqrt{3})$, $(9, 2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3})$. ● 52. Obținem $xy = p + q - r$; $xz = p + r - q$;

$yz = q + r - p$ și apoi $x = \sqrt{\frac{(p + q - r)(p + r - q)}{q + r - p}}$, $y = \sqrt{\frac{(p + q - r)(q + r - p)}{p + r - q}}$; $z = \sqrt{\frac{(p + r - q)(q + r - p)}{p + q - r}}$.

● 53. Prima ecuație se scrie $(x - y)^3 + 3xy(x - y) = 4a^3$. Se ajunge la sistemele $x - y = a$, $xy = a^2$ și $x - y = -2a$, $xy = -2a^2$.

Avem soluțiile $\left(\frac{a(1 \mp \sqrt{5})}{2}, \frac{a(-1 \mp \sqrt{5})}{2}\right)$, $(-a(1 \pm i), a(1 \mp i))$.

● 54. Notînd $x - y = u$, $xy = v$, se ajunge la sistemul $u(u^2 + 3v) = 602$, $uv = 198$. Deducem $u = 2\varepsilon$, unde ε este o rădăcină cubică a unității. Apoi $v = 99\varepsilon^2$. Se ajunge la sistemul $x - y = 2\varepsilon$, $xy = 99\varepsilon^2$, care are 6 soluții $x = (1 \pm 10)\varepsilon$ și $y = (-1 \pm 10)\varepsilon$. Soluțiile reale sînt $(11, 9)$ și $(-9, -11)$. ● 55. Eliminînd pe x și y se obține ecuația $9z(3z^2 - 2z - 1) = 0$, cu rădăcinile 0, 1 și $-\frac{1}{3}$.

Se obțin soluțiile $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $\left(\frac{-3 + \sqrt{33}}{6}, \frac{-3 - \sqrt{33}}{6}\right)$, $\left(\frac{-3 - \sqrt{33}}{6}, \frac{-3 + \sqrt{33}}{6}\right)$. ● 56. Prima ecuație se

poate scrie $(2x + 3y)^2 - 12xy = 10$, sau $(2x - 3y)^2 + 12xy = 10$. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$. ● 57. Se adună în

ambii membrii ai primei ecuații $4y^4$, se grupează și se obține: $[x(2 + y) - 2y^2]^2 = 16y^4$ sau $x(2 + y) - 2y^2 = \pm 4y^2$. Avem

$$\begin{cases} x(2 + y) - 2y^2 = 4y^2 \\ 4y^2 - xy = x \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x(2 + y) - 2y^2 = -4y^2 \\ 4y^2 - xy = x. \end{cases}$$

Se face substituția $x = \frac{4y^2}{y+1}$ și se obțin soluțiile

$$1) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{și} \quad 2) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x = -\frac{50}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

● 58. Împărțind cele două ecuații avem $\frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3} = \frac{a}{b}$, de unde

$x^3 = \frac{a+b}{b-a} y^3$, deci $x = r\epsilon y$, unde $r = \sqrt[3]{\frac{a+b}{b-a}}$, iar ϵ este una

dintre rădăcinile cubice ale unității. Avem $x = \frac{a(1+r)}{1+r+r^2}$, $y =$

$= \frac{ar(1+r)}{1+r+r^2}$. Alte două soluții se obțin înlocuind pe r cu $r\epsilon$

sau cu $r\epsilon^2$. ● 59. Se elimină y și apoi punând $\sqrt{x^{m+n}} = z$

se obține ecuația $z^2 - 2b^{\frac{1}{2}} \sqrt{a^{m-n}} z + b^{m+n} = 0$. Avem $z_{1,2} =$

$= \frac{b^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a^{m-n}} \pm \sqrt{a^{m-n} - b^{m-n}}}$ și apoi rezultă x și y . ● 60. Se împarte

prima ecuație cu xy și a doua cu x^2y^2 , apoi facem substituțiile $x +$

$\frac{1}{x} = u$ și $y + \frac{1}{y} = v$. Obținem sistemul $u + v = 18$; $u^2 + v^2 =$

$= 212$, care are soluțiile $(4, 14)$ și $(14, 4)$. Soluțiile sistemului dat

sînt cele patru combinații posibile luînd pentru x una din valorile

$7 \pm 4\sqrt{3}$, iar pentru y una din valorile $2 \pm \sqrt{3}$. Alte patru soluții

se obțin pe baza simetriei sistemului dat. ● 61. Adunînd cele trei

ecuații avem $(x + y + z)^2 = a + b + c$. Dacă $A^2 = a + b + c >$

> 0 , avem $x = \pm \frac{a}{A}$, $y = \pm \frac{b}{A}$, $z = \pm \frac{c}{A}$. ● 62. Din ultimii

trei termeni egali, avem $\frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$, deci

$$\frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$$

$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = a + b + c = A^2$, unde am presupus că $a +$

$+ b + c > 0$. Găsim $x = \pm \frac{A}{a}$, $y = \pm \frac{A}{b}$, $z = \pm \frac{A}{c}$.

● 63. Înmulțind cele trei ecuații, avem $(x+y)(y+z)(z+x) = \pm abc$. Apoi $x+y = \pm \frac{ab}{c}$, $y+z = \pm \frac{bc}{a}$, $z+x = \pm \frac{ca}{b}$ și deci $x+y+z = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right)$. Avem două soluții $x = \pm \frac{1}{2} \left(-\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right)$, $y = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a} - \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right)$, $z = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} - \frac{ab}{c} \right)$ ● 64. Din prima ecuație se obține $x+y$.

$(14, -11), (11, -14), \left(\frac{25+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-25+i\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{25-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-25-i\sqrt{3}}{2} \right)$. ● 65. Din ultimele două ecuații rezultă $z = 5\varepsilon$, unde ε este o rădăcină cubică a unității. Se găsesc apoi pentru y valorile 5ε sau $-\frac{5}{2}\varepsilon$, iar pentru x respectiv valorile 5ε sau -10ε .

Avem următoarele șase soluții $(5\varepsilon, 5\varepsilon, 5\varepsilon), \left(-10\varepsilon, -\frac{5}{2}\varepsilon, 5\varepsilon \right)$, unde ε se înlocuiește pe rând cu fiecare rădăcină cubică a unității.

● 66. Din ultimele două ecuații obținem $\frac{z}{x} = \frac{3}{7}\varepsilon$, unde ε este o rădăcină cubică a unității. Din prima ecuație găsim $yx^2 = \pm 5 \cdot 7^2$. Cu aceste rezultate din ultima ecuație avem $x = \pm 7\varepsilon^2$. Rezultă că sistemul dat are următoarele șase soluții $(7\varepsilon^2, 5\varepsilon^2, 3)$, $(-7\varepsilon^2, -5\varepsilon^2, -3)$, unde ε trebuie înlocuit pe rând cu cele trei rădăcini cubice ale unității. ● 67. a) Din prima și a treia ecuație găsim $y = \frac{m+2-x^2-2x}{1-x}$, $z = \frac{m+1-2x^2}{1-x}$. Scriind a doua

ecuație sub forma $3x^2 + (y-z)(y+z) = 3$ și ținând seama de expresiile precedente și de prima ecuație, avem succesiv $x = m$, $y = m+2$ și $z = 2m+1$. b) $m = 3$, $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$; c) $m = 4$, $x = 4$, $y = 6$, $z = 9$; $m = -1$, $x = -1$; $y = 1$, $z = -1$.

● 68. Notînd $x+y = z$, găsim $xy = \frac{z^2 - a^2}{4}$, deci x și y sînt rădă-

cinile ecuației $u^2 - zu + \frac{z^2 - a^2}{4} = 0$. Dar acestea sînt $\frac{z \pm a}{2}$, deci ele sînt

reale, dacă z este real. A doua ecuație din sistem devine $3az^3 + a^3z - 4b = 0$. Ea are o singură rădăcină reală, căci ecuația derivată

nu are rădăcini reale (șirul lui Rolle). Aplicație: $z = 2$, $x = 2$, $y = 0$. ● **69.** Întrucît $x^2 + y^2 = 1$, putem scrie $x = \cos t$, $y = \sin t$ și a doua relație devine $e^{jnt} + e^{-jnt} = 2a$, care se scrie $\cos nt = a$. Rezultă că avem toate soluțiile reale, dacă $|a| < 1$.

În acest caz $t = \pm \frac{1}{n} \arccos a + \frac{2K\pi}{n}$, deci

$$\begin{cases} x = \cos\left(\pm \frac{1}{n} \arccos a + \frac{2K\pi}{n}\right) \\ y = \sin\left(\pm \frac{1}{n} \arccos a + \frac{2K\pi}{n}\right), \quad K \text{ întreg.} \end{cases}$$

● **70.** (5, 1), (1, 5), (3, 2), (2, 3). ● **71.** (1, 3), (3, 1), $\left(\frac{-5 + i\sqrt{23}}{2}, \frac{-5 - i\sqrt{23}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5 - i\sqrt{23}}{2}, \frac{-5 + i\sqrt{23}}{2}\right)$. ● **72.** Se notează $x^2 - y^2 = u$, $-xy = v$. Găsim $x = \pm 5$, $y = \pm 4$; $x = \pm 4i$, $y = \pm 5i$; $x = \pm i \frac{\sqrt{19} \pm 1}{\sqrt{2}}$, $y = \pm i \frac{\sqrt{19} \mp 1}{\sqrt{2}}$. ● **73.** Soluțiile reale sînt (2, 1)

și (1, 2). ● **74.** (3, -1), $\left(1 + i\sqrt{\frac{5}{21}}\right)$ și cele simetrice. ● **75.** $(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$, $(1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$, $(-1 - i, -1 + i)$, $(-1 + i, -1 - i)$. ● **76.** Sistemul se poate scrie

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 19) = 0 \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0. \end{cases}$$

Avem $x = y = 0$; $x = y = \pm \sqrt{7}$; $x = -y = \pm \sqrt{19}$; $x = -2$, $y = -3$. ● **77.** (1, 3); (-1, -3). ● **78.** Găsim $x + y + z = \frac{13}{9}$,

$xy + yz + zx = \frac{13}{9}$, $xyz = 1$. Deci x, y, z sînt rădăcinile ecuației

$t^3 - \frac{13}{9}t^2 + \frac{13}{9}t - 1 = 0$. Soluțiile sistemului omogen dat, sînt cele

3! permutări ale numerelor $1, \frac{2 - i\sqrt{77}}{9}, \frac{2 + i\sqrt{77}}{9}$. ● **79.** Ecuația

de gradul trei care are ca rădăcini soluțiile sistemului este $(t - a) \cdot$

$(6t^2 + a^2) = 0$. O soluție este atunci $\left(a, \frac{ai}{\sqrt{6}}, -\frac{ai}{\sqrt{6}}\right)$, alte cinci

soluții se obțin prin permutări ale celor trei numere. ● 80. Ecuația de gradul trei care are ca rădăcini pe x , y și z este $(t-1)(t+1)(t-2)=0$, deci cele șase soluții se obțin scriind permutările numerelor 1, -1 și 2. ● 81. Notînd $xy+yz+zx=u$, $xyz=v$, ecuația de gradul trei care are ca rădăcini pe x , y și z este $t^3+ut-v=0$. Dar $x^4+y^4+z^4=2u^2=50$ și $x^5+y^5+z^5=-5uv=-50$, deci $u=-5$, $v=-2$, sau $u=5$, $v=2$. Ecuația de gradul trei este $t^2-5t+2=0$, sau $t^3+5t-2=0$. Prima are rădăcinile reale 2, $-1 \pm \sqrt{2}$, iar a doua o rădăcină reală α și două rădăcini complexe β și γ . Sistemul dat are deci șase soluții reale, obținute din permutările numerelor 2, $-1 \pm \sqrt{2}$. Alte șase soluții (complexe) se obțin din permutările numerelor α , β și γ . ● 82. Se aduce la numitor comun în prima și ultima ecuație și notînd cu A , B , C , D funcțiile simetrice fundamentale ale lui x , y , z și u , acestea sînt rădăcinile ecuației $t^4-At^3+Bt^2-Ct+D=0$. Cum în cazul nostru $A=5$, $B=5$, $C=-5$ și $D=-6$, ecuația este $t^4-5t^3+5t^2+5t-6=0$, care are rădăcinile 1, -1, 2 și 3. Cum sistemul dat este simetric, orice permutare a acestor numere este o soluție a sistemului. ● 83. Notînd $x+y=u$, $xy=v$, sistemul devine $u(u^2-2v)=13$, $v^2(u^2-2v)=468$. Se ajunge la ecuația $v^6-2\cdot 36^2v^3-13\cdot 36^3=0$, deci $v=6\sqrt[3]{13}\varepsilon$, $v=-6\varepsilon$, unde ε este una dintre rădăcinile cubice ale unității. Avem apoi $u=\varepsilon^2\sqrt[3]{13^2}$, $u=\varepsilon^2$. Valorile pentru x și y se obțin din una dintre ecuațiile $z^2-\varepsilon^2\sqrt[3]{13^2}z+6\varepsilon\sqrt[3]{13}=0$, $z^2-\varepsilon^2z-6\varepsilon=0$. Din acestea avem $z=\frac{\varepsilon^2(\sqrt[3]{13^2}\pm\sqrt{-11\sqrt[3]{13}})}{2}$ și $z=\frac{\varepsilon^2(1\pm 5)}{2}$. Din cauză că sistemul dat este simetric, avem aici 12 soluții dintre care numai două reale (3, -2) și (-2, 3) (Am ținut seama că $\sqrt{\varepsilon}=\varepsilon^2$). ● 84. $\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)$, (1, 2), $\left(\frac{1+i\sqrt{71}}{6}, \frac{1-i\sqrt{71}}{6}\right)$, precum și soluțiile simetrice. ● 85. $m \in \left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}, \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)$ rădăcini reale distincte; $m \in \left\{\frac{2-\sqrt{6}}{2}, \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right\}$ rădăcini reale egale; $m \in \left(-\infty, \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{6}}{2}, +\infty\right)$ rădăcini complexe. ● 86. $m \in \left(1; \frac{4}{3}\right]$. ● 87. $x = \pm a + \sqrt{2a^2-9}$, $y = \pm a - \sqrt{2a^2-9}$.

Rădăcini reale dacă $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{3}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$. ● 88. Cele două

ecuații reprezintă în plan, 2 parabole simetrice față de bisectoarea întâia a axelor de coordonate, deci soluțiile sistemului vor fi de forma (x, x) . Deci $x = (x - 6)^2$ sau $x^2 - 13x + 36 = 0$ de unde

$x = y = 4$, $x = y = 9$. ● 89. Se notează $\frac{x+y}{5x} = z^2$ și se găsește

$z_1 = \frac{5}{3}$, $z_2 = \frac{3}{5}$. Se rezolvă apoi sistemul

$$\begin{cases} x(1 - 5z^2) + y = 0 \\ x + y + xy = 29. \end{cases}$$

$$(5, 4), \left(-\frac{29}{4}, -\frac{29}{5}\right), \frac{-125 \pm \sqrt{136729}}{232}, \frac{-125 \pm \sqrt{136729}}{18}.$$

● 90. Notînd $\frac{2x-1}{y+2} = z^2$, se găsește $z = 1$ și apoi soluția sistemului $(5, 7)$. ● 91. Se notează $x = u^3$, $y = v^3$. Găsim soluțiile $(27, 1)$ și $(1, 27)$. ● 92. Înmulțind ecuațiile, după simplificare, avem

$\sqrt[3]{xyz} = 1$ și apoi găsim soluțiile $\left(\frac{10}{3}, \frac{12}{5}, \frac{1}{8}\right)$ și $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{5}, \frac{15}{8}\right)$.

● 93. Sistemul se scrie $x + y = 61 + \sqrt{xy}$, $\sqrt[4]{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 78$. Ridicînd a doua ecuație la pătrat, și notînd $x + y = u$ și $\sqrt{xy} = v$, avem sistemul $u - v = 61$, $v(u + 2v) = 6084$. Se găsește $x + y = 97$, $xy = 1296$; $x + y = \frac{17}{3}$, $xy = \frac{17556}{9}$. Primul sistem dă soluțiile reale $(81, 16)$ și $(16, 81)$. ● 94. $x = 10^6$, $y = 10^{-1}$

● 95. $x = 10^{\frac{2a+b}{4}}$, $y = 10^{\frac{2a-b}{4}}$. ● 96. $x = 2$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 2$.

● 97. $x = 7$, $y = 3$. ● 98. $x = \pm a^2 b^2 \sqrt{\frac{3a+2b}{2a+3b}}$,

$y = \pm \frac{\sqrt{(2a+3b)(3a+2b)}}{b}$. ● 99. $x = 10$; $y = 5$.

● 100. Se notează $\log x = u$, $\log y = v$. Soluțiile sînt $(a\sqrt{a}, \sqrt{a})$, $(\sqrt{a}, a\sqrt{a})$. ● 101. $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$. ● 102. Prima ecuație se scrie

$(\log_y x - 1)^2 = 0, x = y = 3$. ● 103. $(8, 2), \left(\frac{1}{4}, 2^6\right)$. ● 104. Se ține seama că $\log_a N^2 = \log_a N$. Sistemul se poate scrie

$$\begin{cases} x \sqrt{yz} = 2^2 \\ y \sqrt{xz} = 3^2 \\ z \sqrt{xy} = 4^2 \end{cases}$$

deci $xyz = 24$. Soluția este $x = \frac{2}{3}, y = \frac{27}{8}, z = \frac{32}{3}$.

● 105. Sistemul se scrie $\log xy = \log 10, \log (29 + 2xy) = 2 \log (x + y)$.

Găsim soluțiile $(5, 2), (2, 5)$. ● 106. $x = 1, y = 2$. ● 107. $x = \frac{1}{2},$

$y = \frac{\sqrt{2}}{5}$. ● 108. $(4, \sqrt{2}), (4, -\sqrt{2})$. ● 109. $(3, 2), (2, 3)$. ● 110. $x =$

$= -2, y = 3$. ● 111. Se iau logaritmi. $x = 3, y = 2$. ● 112. Sistemul se scrie

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ (x - y)^2 = 2^2 \end{cases}. \text{ Soluțiile sînt } (3, 1) \text{ și } \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

● 113. Se iau logaritmi $x = y = \frac{1}{p}$. ● 114. $x = 4; y = 2$. ● 115. So-

luția reală este $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}; y = \sqrt[3]{9}$. ● 116. Avem $\log_{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{2}\right) =$

$= \log_{\frac{1}{2^3}} \left(\frac{1}{2}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Luăm logaritmi în ambii

membrii și notăm $x + y = u, x - y = v$. Găsim $u = 12, v = 2$, deci $x = 7, y = 5$. ● 117. Se iau logaritmi și se împart cele

două ecuații. Găsim $(\log x - \log y^2)(\log x + \log y^2) = 0$, deci sau

$x = y^2$ sau $x = \frac{1}{y^2}$. Soluțiile sînt $(4, 2)$ și $(9, -3)$. ● 118. $x =$

$= \frac{2}{\log 102}; y = 101$. ● 119. Luînd logaritmi în baza 2, avem

$$\begin{cases} x \log_2 3 + y = 6 + 2 \log_2 3 \\ (y - x)^2 = 2^4 \end{cases}$$

căci $576 = 2^6 3^2$ și $\log_{\sqrt{2}} (y - x) = \log_2 (y - x)^2$. Avem $x = 2, y = 6$.

● 120. Se elimină x și z din cele trei ecuații. Găsim ecuația $\frac{71 + 2 \cdot 5^y}{21 - 2 \cdot 5^{\frac{y}{2}}} =$

$= 16 - 5^{\frac{y}{2}}$. Deducem $y = 2$ și apoi $x = 2$ și $z = 1$. ● 121. Sistemul de ecuații este echivalent cu $\left(\frac{a}{b}\right)^{x-y} (c^n)^{y-x} = \left(\frac{a}{bc^n}\right)^{x-y} = 1$, $a^y b^x = c^{ny} \left(c + \frac{1}{c}\right)$.

1° $a \neq bc^n$; $x = y$

$$\left(\frac{ab}{c^n}\right)^x = x + \frac{1}{c}, \quad x = \frac{\ln\left(c + \frac{1}{c}\right)}{\ln\left(\frac{ab}{c^n}\right)}$$

$$2^\circ \quad c^n = \frac{a}{b}, \quad c = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (n \neq 0)$$

$$a^y b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^y \left(c + \frac{1}{c}\right) \Leftrightarrow b^{x+y} = \left(c + \frac{1}{c}\right).$$

$$x + y = \frac{\ln\left(c + \frac{1}{c}\right)}{\ln b} = \frac{\ln\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right]}{\ln b} = 2A, \quad x = A + t, \quad y =$$

$$= A - t, \quad -\infty < t < +\infty, \quad x = \frac{\ln\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right]}{2 \ln b} + t, \quad y =$$

$$= \frac{\ln\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right]}{2 \ln b} - t,$$

$$3^\circ \quad n = 0, \quad c^0 = 1 = \frac{a}{b}, \quad b = a \neq 1$$

$$a^{x+y} = c + \frac{1}{c}, \quad x + y = \frac{\ln\left(c + \frac{1}{c}\right)}{\ln a}. \quad \text{Se regăsește soluția } x + y =$$

$= \frac{\ln \left(c + \frac{1}{c} \right)}{\ln b}$. În cazul $b = a$, $b = a = 1$, $n = 0$, deducem $1 = c + \frac{1}{c}$ imposibilă pentru c real, așa că nu avem soluții. ● 122. Valo-

rilor pentru u și v se pot determina și în baza următorului raționament. Dacă $u \neq v$, primele două ecuații dau valorile lui x și y în funcție de u și v . Pentru ca sistemul de patru ecuații, în x și y , să fie compatibil, trebuie ca cei doi determinanți caracteristici să fie nuli, deci

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & a_1 \\ u^2 & v^2 & a_2 \end{vmatrix} = (u-v)[uv - a_1(u+v) + a_2] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & a_1 \\ u^3 & v^3 & a_3 \end{vmatrix} = (u-v)[uv(u+v) - a_1(u^2 + v^2 + uv) + a_3] = 0.$$

Cum $u \neq v$, din acestea rezultă $u + v = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1^2 - a_2}$, $uv = \frac{a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^2 - a_2}$, deci u și v sînt rădăcinile ecuației $(a_1^2 - a_2)t^2 + (a_3 - a_1 a_2)t + a_2^2 - a_1 a_3 = 0$. Valorile pentru x și y rezultă apoi din primele două ecuații. ● 123. $a = \frac{2}{3} \sqrt{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}$,

$$b = \frac{2}{3} \sqrt{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}, \quad c = \frac{2}{3} \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}. \quad \bullet \quad 124. \quad x = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{a}}; \quad y = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{b}},$$

$$z = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{c}}, \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = d^2(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})^3.$$

● 125. Se iau ca necunoscute $x + y$ și xy . Avem $x + y = \frac{2(ab - cd)}{a + b - c - d}$;

$$xy = \frac{ab(c + d) - cd(a + b)}{a + b - c - d}. \text{ Formăm ecuația de gradul II, cu-}$$

noscînd suma și produsul rădăcinilor, $t^2 - \frac{2(ab - cd)}{a + b - c - d}t + \frac{ab(c + d) - cd(a + b)}{a + b - c - d} = 0$, ecuație care ne dă pe x și y . Pentru

demonstrarea egalității cerute observăm că: $\frac{(x - y)^2}{4} = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - xy$. Înlocuim pe $x + y$ și xy calculate mai sus și efectuînd calculele și descompunînd numărătorul în factori, obținem relația cerută. ● 126. Se obține relația: $\alpha^3x = \beta^3y = \gamma^3z$ și apoi

$$x^3 = \frac{16}{\alpha^9 \left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3}\right) \left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} - \frac{1}{\gamma^3}\right) \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3}\right) \left(-\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3}\right)}$$

și alte două formule analoage pentru y^3 și z^3 . ● 127. 1° Notînd

$\frac{1}{yz} = X, \frac{1}{xz} = Y, \frac{1}{xy} = Z$ avem sistemul

$$\begin{cases} 2(m^2 - 3)X + 2Y + (m - 1)Z = -2 \\ (\alpha - m^2)X + mY + 3Z = -1 \\ mX + Z = -1. \end{cases}$$

Determinantul coeficienților necunoscutelor este

$$D = \begin{vmatrix} 2(m^2 - 3) & 2 & m - 1 \\ \alpha - m^2 & m & 3 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = m^3 + 3m^2 - 2\alpha.$$

Notînd $A = m^2 - 3m - 4$, $B = m^3 + 2m^2 - (7 + \alpha)m + 3\alpha - 12$, $C = -2m^3 + 4m + 2\alpha$, dacă $D \neq 0$, avem singura soluție $X = \frac{A}{D}$, $Y = \frac{B}{D}$, $Z = \frac{C}{D}$. Revenind la variabilele de la început,

găsim două soluții, $x = \pm \sqrt{\frac{AD}{BC}}$, $y = \pm \sqrt{\frac{BD}{AC}}$, $z = \pm \sqrt{\frac{CD}{AB}}$, dacă factorii care intervin sînt pozitivi. 2° Dacă $z = 0$, rezultă

$m = \alpha = 0$ și soluțiile sînt $z = 0$, $x = \frac{1}{3}y$. Dacă $y = 0$, trebuie ca $\alpha = 10$, $m = 2$, deci $y = 0$, $z = -2x$ sau trebuie ca $\alpha = 0$, $m = -3$, deci $y = 0$, $z = 3x$. Nu se poate ca numai necunoscuta x să fie nulă. 3° Avem:

$\alpha \backslash m$	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
D	$-$	$2(2-\alpha)$	-2α	$+$	
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$+$	o rădăcină reală în $(-\infty, -2)$.
0	$-$	$+$	0	$+$	o rădăcină reală în $(-\infty, 2)$ și una dublă nulă.
	$-$	$+$	$-$	$+$	trei rădăcini reale în $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ și $(0, +\infty)$.
2	$-$	0	$-$	$+$	o rădăcină dublă -2 și o rădăcină reală în $(0, +\infty)$.
$+\infty$	$-$	$-$	$-$	$+$	o rădăcină reală în $(0, +\infty)$.

4° Notînd elementul neutru cu u , trebuie să avem $xTu = uTx = x$, $\forall x$, deci $ax^2 + x(2u + 2m^2 - 7) + au^2 + 2u + m - 1 = 0$, așa că $a = 0$, $2u + 2m^2 - 7 = 0$, $2u + m - 1 = 0$. Trebuie ca $m_1 = 2$ sau $m_2 = -\frac{3}{2}$ și avem legile: $xT_1y = 2xy + 2x + 2y + 1$, $xT_2y = 2xy - \frac{3}{2}x + 2y - \frac{5}{2}$. A doua nu corespunde, căci nu îndeplinește axioma de asociativitate. Pentru prima se vede că grupul este comutativ. Elementul neutru este $u = -\frac{1}{2}$, iar simetricul

lui x este $-\frac{3+4x}{4(x+1)}$, care justifică excluderea din mulțimea E

a numărului -1 . ● 128. $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. ● 129.

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, -1\right) \cup (4, +\infty)$. ● 130. $x \in \left(-36; -\frac{13}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.

● 131. Punctele corespunzătoare soluțiilor sistemului de ine-

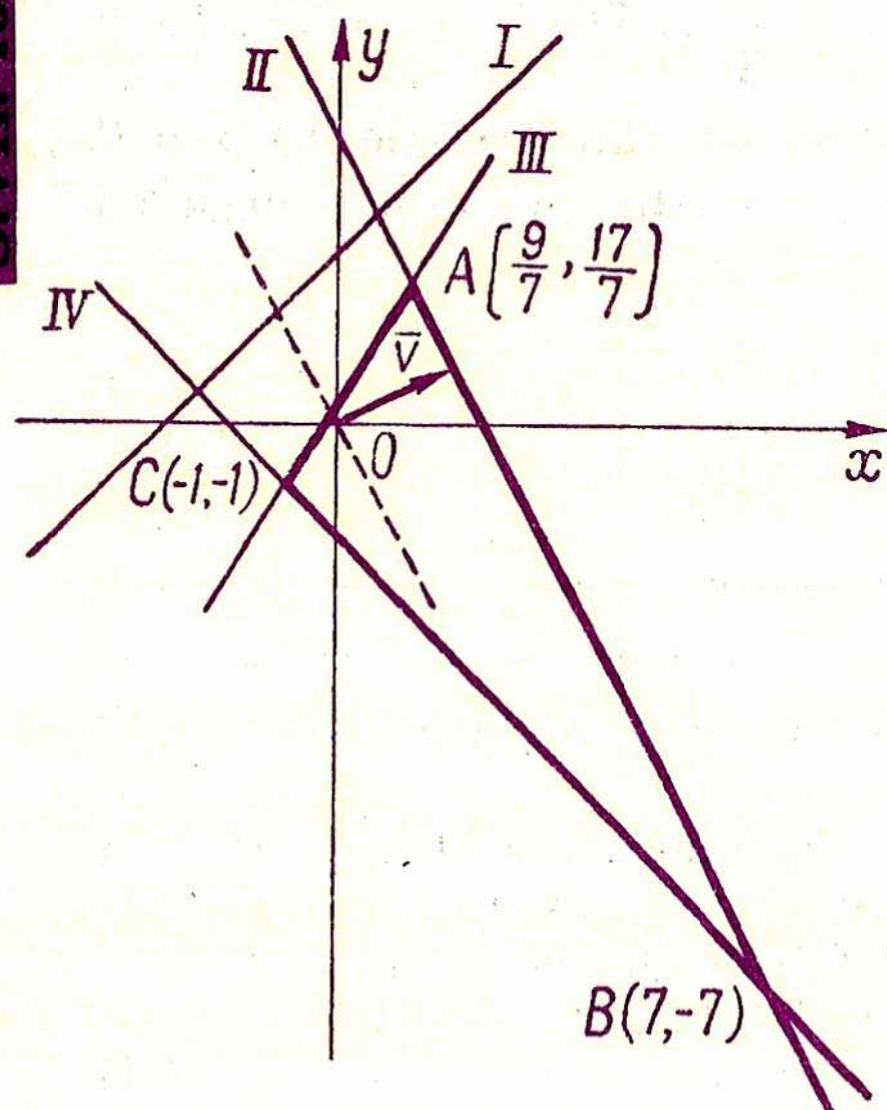


Fig. S.7.1

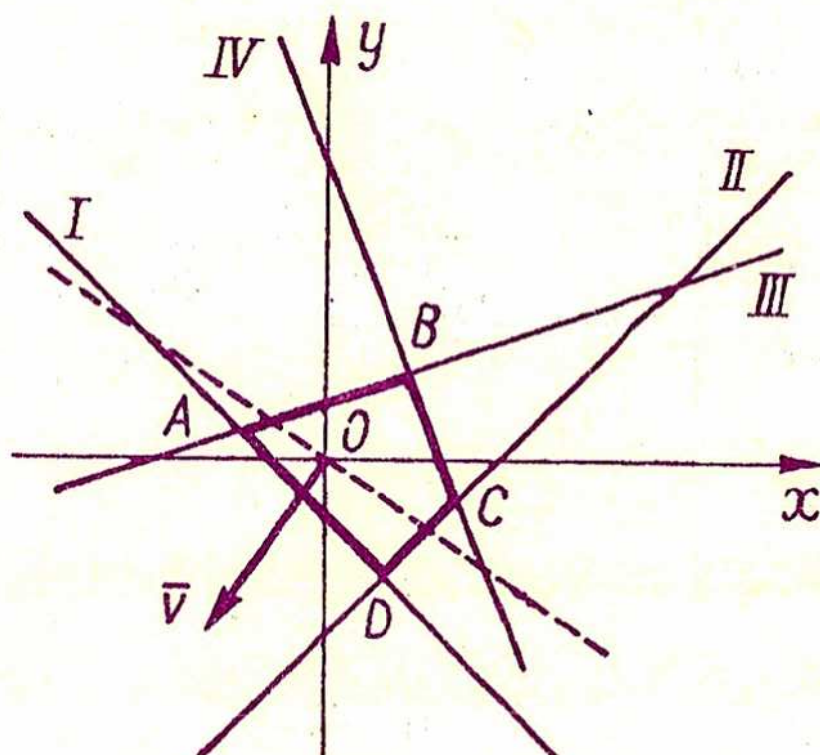


Fig. S.7.2

cuații se găsesc în triunghiul ABC și pe frontiera acestuia (Fig. S.7.1). Se constată că prima inecuație poate fi eliminată. 1° Dreptele $2x + y = a$ sînt paralele cu dreapta (II). Cum vectorul $\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j}$ este dirijat de la origine spre dreapta (II), $\max \{2x + y\}$ este realizat pentru toate punctele segmentului AB și este egal cu 5. 2° $\min \{2x + y\} = -3$ și are loc în punctul C . 3° $\max \{x + 2y - 3\} = \frac{22}{7}$ și are loc în punctul A . 4° $\min \{x + 2y - 3\} = -5$ și are loc în punctul C .

● **132.** Punctele corespunzătoare soluțiilor sistemului de inecuații se găsesc în domeniul $ABCD$ (Fig. S.7.2). 1° Cum $\bar{v} = -2\bar{i} - 3\bar{j}$, deci maximul funcției $-2x - 3y + 7$ are loc pentru coordonatele punctului D și este 11, iar minimul, pentru coordonatele punctului B și este $-\frac{4}{7}$. 2° Nu avem solu-

ții. ● **133.** Punctele corespunzătoare soluțiilor sistemului de inecuații se găsesc în domeniul infinit $ABCD$ (Fig. S.7.3). Cum $\bar{v} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$,

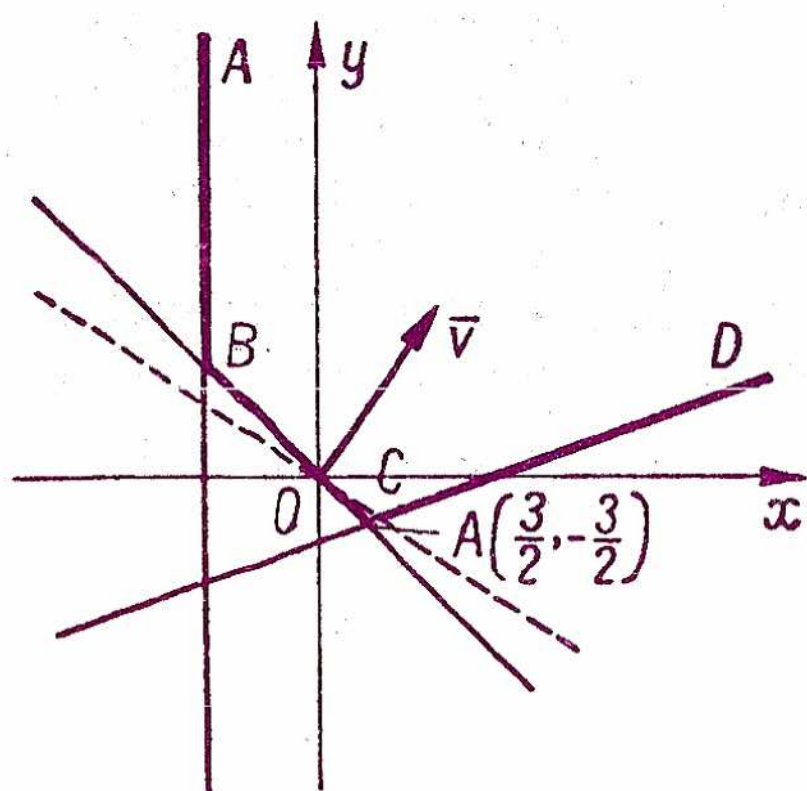


Fig. S.7.3

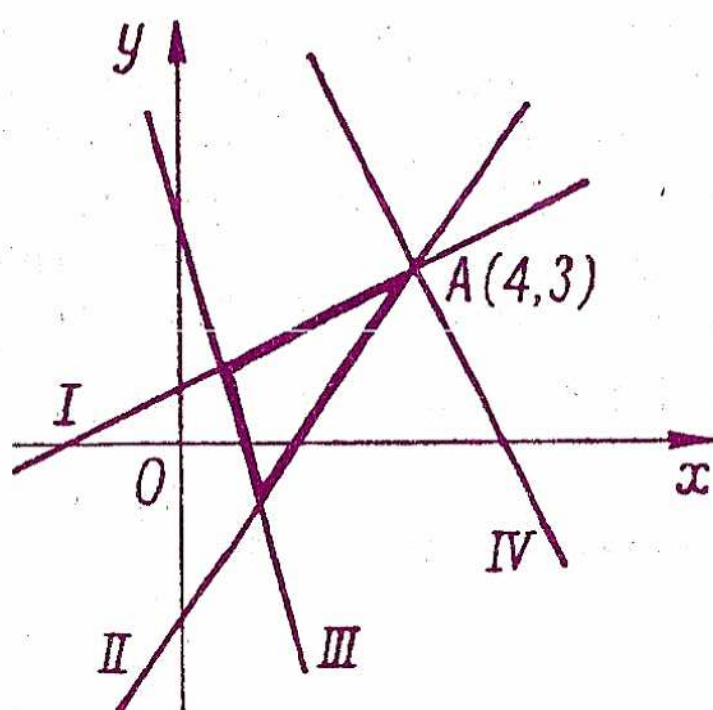


Fig. S.7.4

maximul funcției liniare $2x + 3y + 6$ este infinit, iar minimul are loc pentru coordonatele punctului A și este $\frac{9}{2}$. ● 134. Sistemul are

o singură soluție $(4,3)$ (Fig. S.7.4), deci funcția $3x - y - 9$ nu poate lua decât valoarea nulă. ● 135. Ecuația $x^2 + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ repre-

zintă grafic o elipsă cu semiaxele 1 și 3. Punctele corespunzătoare sistemului determină domeniul hașurat din Fig. S.7.5. ● 136. Hiper-

bola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} - 1 = 0$ împarte planul în trei regiuni (Fig. S.7.6). În

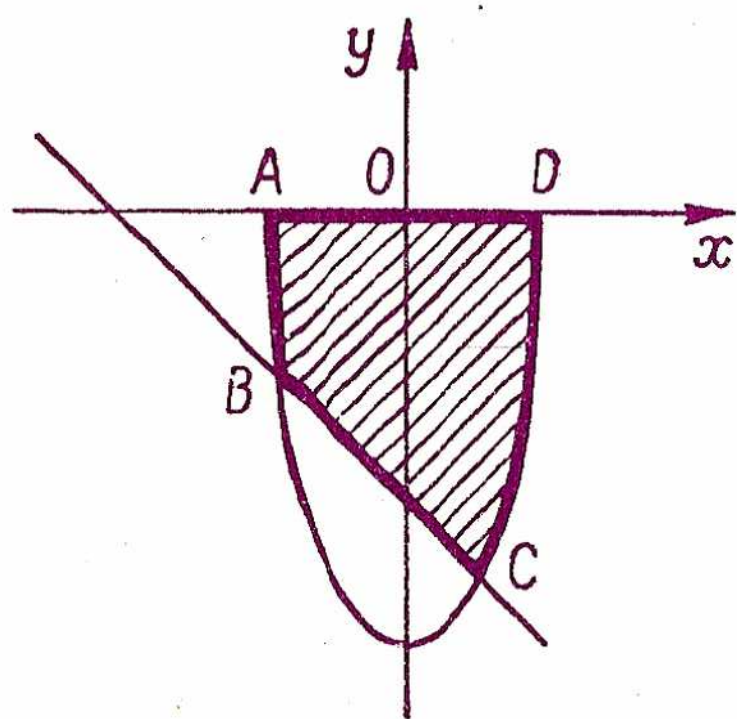


Fig. S.7.5

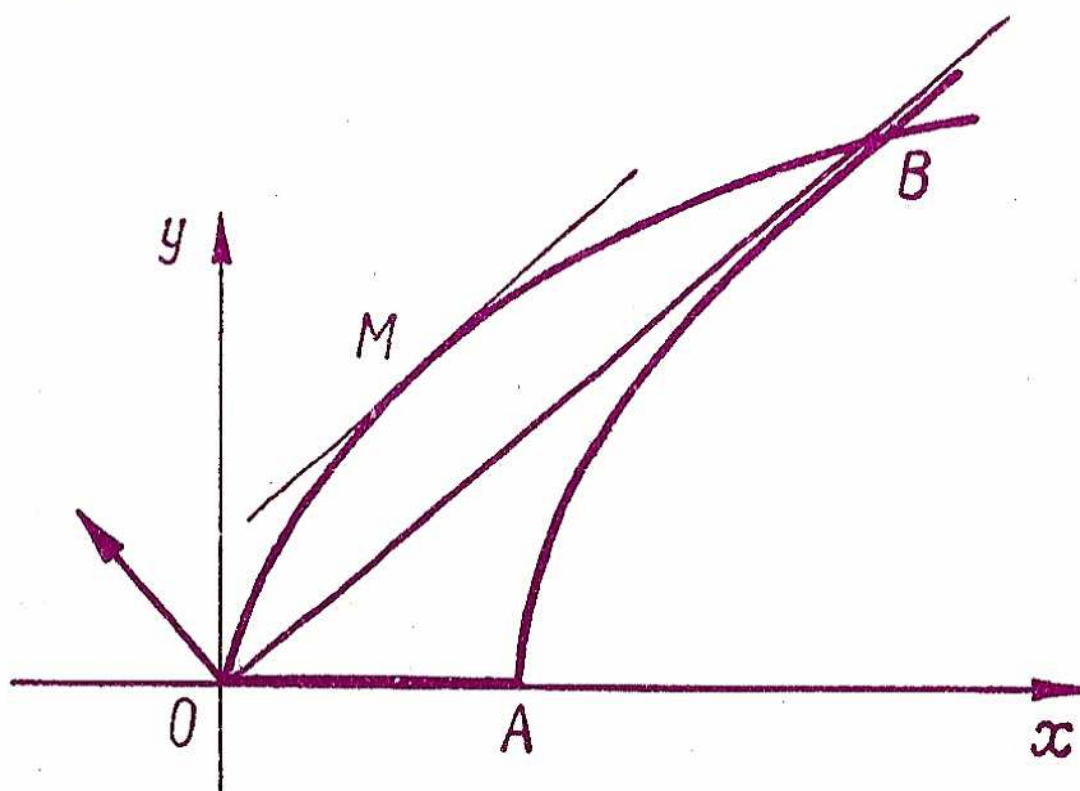


Fig. S.7.6

cea care conține originea, polinomul din prima parte a ecuației precedente este negativ. Parabola $y^2 - 3x = 0$ împarte planul în două regiuni. În interiorul parabolei și pe parabolă polinomul $y^2 - 3x$ este nenegativ. Punctele corespunzătoare soluțiilor sistemului se găsesc în și pe triunghiul curbiliniu OAB . Dreptele $-x + y + 2 = \text{const.}$ sînt paralele cu bisectoarea axelor de coordonate, deci trebuie căutată tangenta la parabolă care are panta unitate, Cum $2yy' = 3$, trebuie ca $\frac{3}{2y} = 1$, deci $y = \frac{3}{2}$ și apoi $x = \frac{3}{4}$.

Maximul căutat este $\frac{11}{4}$.

Cap. VIII. Structuri algebrice

● 1. Dacă operația este comutativă, tabela este simetrică față de diagonala ei principală. Dacă u este elementul neutru, pe linia și coloana lui apar elementele mulțimii în ordinea fixată în tabelă. Dacă s este un element singular, pe linia și coloana lui apare mereu tot el ● 2. Ambele operații sînt asociative și comutative. Elementul a este neutru pentru legea $*$, iar b este neutru pentru legea $\top$. Elementele simetrice sînt în primul caz ele însele, iar în al doilea caz nu există (căci $a \top a' \neq b$, unde a' este simetricul lui a). Legile sînt distributive una față de alta. A doua operație are elementul singular a . ● 3. Dacă structura este asociativă și comutativă, avem $a * d = (\alpha * \gamma) * (\beta * \delta) = \alpha * [\gamma * (\beta * \delta)] = \alpha * [(\beta * \delta) * \gamma] = \alpha * [(\delta * \beta) * \gamma] = (\alpha * \delta) * (\beta * \gamma) = b * c$. Reciproc, notînd elementul neutru cu e , dacă avem $(\alpha * \gamma) * (\beta * \delta) = (\alpha * \delta) * (\beta * \gamma)$, luînd $\alpha = \delta = e$, găsim $\gamma * \beta = \beta * \gamma$, deci operația este comutativă, iar dacă luăm $\alpha = e$, deducem $\gamma * (\beta * \delta) = \delta * (\beta * \gamma) = (\beta * \gamma) * \delta = (\gamma * \beta) * \delta$, deci ea este și asociativă (Fig. S.8.1). ● 4. 1° Prima lege definește pe mulțimea $\mathcal{M}$ o structură de grup comutativ. A doua lege este anticomutativă $a' \perp a = -(a \perp a')$ și nu este asociativă. 2° Cele trei duble produse față de a doua operație se obțin prin permutări circulare. Rezultatul este elementul neutru față de prima operație. ● 5. $(a \top b) \top (d \top c) = a \top [b \top (d \top c)] = a \top [(b \top d) \top c] = (b \top d) \top (a \top c)$. ● 6. Elementul neutru, notat cu 0 este c . Relația $x * b = c$, nu are soluții (elementul b este singular). Celelalte ecuații au în ordine soluțiile: $x=c$; $x=c$, $x=b$; $x=a$, $x=b$, $x=c$. ● 7.1° Schema din Fig. S.8.2, arată că avem $A \Delta B = A \cup B - A \cap B$. Dacă submulțimile A și B

*	γ	δ
α	a	b
β	c	d

Fig. S.8.1

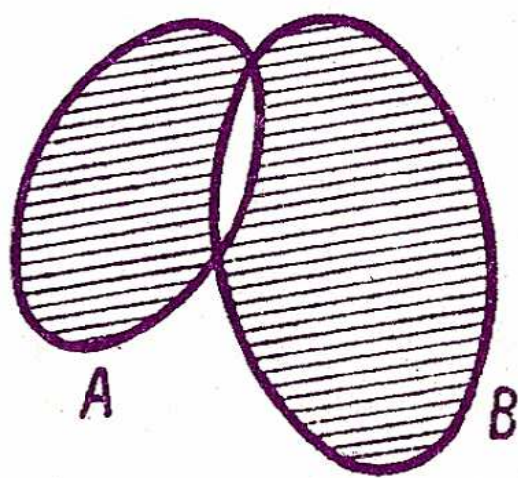


Fig. S.8.2

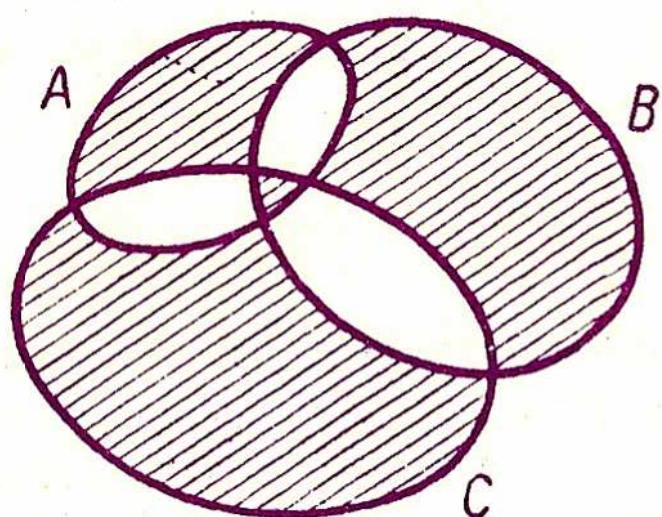


Fig. S.8.3

sînt disjuncte, avem $A \Delta B = A \cup B$, iar dacă $B \subset A$, $A \Delta B = A - B$. 2° Din Fig. S.8.2 se vede că operația este comutativă, iar din Fig. S.8.3 rezultă că ea este asociativă, căci mulțimea $(A \Delta B) \Delta C$ este reprezentată prin partea hașurată. Elementul neutru este mulțimea vidă $\emptyset$, iar simetricul lui A este tot A . 3° Trebuie să avem $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. Utilizînd proprietatea de distributivitate a operației $\cap$ față de operația $\cup$ și față de operația $-$, precum și proprietatea

de asociativitate a operației $\cap$, avem $A \cap (B \Delta C) = A \cap [B \cup C - B \cap C] = A \cap (B \cup C) - A \cap (B \cap C)$ și $(A \cap B) \Delta (A \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) - (A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap (B \cup C) - A \cap B \cap C$, ceea ce dovedește proprietatea. ● 8. 1°. Dacă ta-

belul se completează cu $a * a = b$, legea nu este asociativă, căci $(a * c) * a = c * a = a$ și $a * (c * a) = a * a = b$. Completarea tabelului se poate face ca să avem legea asociativă, de exemplu ca în tabelul alăturat, căci $x * y * c = c$, $x * y * z = a$, dacă $z = a$ sau $z = b$. 2° Nu poate fi comutativitate decît dacă $a = c$. 3° Pe linia și coloana

*	a	b	c
a	a	a	c
b	a	a	c
c	a	a	c

elementului neutru, ar trebui să fie în ordine elementele a, b, c , ceea ce nu se poate. ● 9. 1° Oricum am completa tabelul, legea nu este asociativă. Pentru a găsi care sînt acele combinații de elemente care împiedică asociativitatea, observăm că elementele date în tabelul operației sînt simetrice față de diagonala acestuia. Dacă acest tabel ar fi completat simetric, legea ar trebui să fie comutativă și asociativă, deci să aibă loc și pentru elementele date, „regula dreptunghiului”. Dacă pentru unele din acestea regula nu este îndeplinită, acele elemente ne pot conduce la eventualele triplete de elemente, pentru care operația nu este asociativă. Astfel pentru elementele din linia întâia și a treia și coloanele a doua și a treia avem $a * b = a$, $b * c = c$, deci regula nu este îndeplinită. Încercăm produse a căror rezultat să fie pe linia a treia. Avem $(c * c) * a = b * a = a$, $c * (c * a) = c * b = c$ deci dublul produs dintre c , c și a nu este asociativ, deci oricum am completa tabelul, legea nu este asociativă. 2° Pentru ca să existe comutativitate, tabloul trebuie să fie simetric față de diagonala lui principală. 3° Elementul neutru este b și din acest motiv tripletele care conțin elementul b dau produse

asociative. ● 10. 1° $(x * y) * z = (x \top a \top y) * z = (x \top a \top y) \top a \top z$ de unde rezultă că operația $*$ este asociativă, dacă $\top$ este asociativă. 2° $x * y = x \top a \top y = a \top x \top y = a \top y \top x = y \top a \top x = y * x$. 3° Notînd cu e' elementul neutru față de operația $*$, din $x \top e = x$ și $x * e' = x \top a \top e' = x$, rezultă $a \top e' = e$, deci $e' = a^{-1}$, inversul față de operația $\top$ a elementului fix a . Notînd cu x' simetricul lui x față de operația $*$, din $x * x' = a^{-1}$, deducem succesiv $x \top a \top x' = a^{-1}$, $a \top x' = x^{-1} \top a^{-1}$, $x' = a^{-1} \top x^{-1} \top a^{-1}$ și elementul invers este $x' = a^{-2} \top x^{-1}$. ● 11. Adunînd ultimele două ecuații și apoi primele două, avem sistemul echivalent

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4y + 3z = 0 \\ 3x + 4z = 3. \end{cases}$$

Din a doua ecuație deducem $4y = -3z = 2z$ deci $2y = z$. Se găsește soluția $x = 1, y = 0, z = 0$. ● 12. Avem $a * b = a^b$, iar $b * a = b^a$, diferit în general de primul număr. Apoi, $(a * b) * c = (a^b)^c = a^{bc}$, $a * (b * c) = a * b^c = a^{(b^c)}$, care sînt în general diferite. Astfel de exemplu pentru $a = 2, b = 3, c = 4$, avem $(2 * 3) * 4 = 2^{12}$; $2 * (3 * 4) = 2^{81}$. Notînd elementul neutru cu x , trebuie să avem $a * x = a$, deci $a^x = a$, așa că $x = 1$, deci avem element neutru la dreapta. Însă din $x * a = x^a = a$, ar rezulta că trebuie să avem $\ln a = a$ ceea ce nu se poate. ● 13. Operația este peste tot definită, căci

$$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

și dacă $n, m \in \mathbb{Z}$, același lucru are loc și pentru $n + m$. Elementul neutru este $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, iar elementele

$$\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ și } \begin{bmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sînt inverse unul altuia. Asociativitatea are loc, căci înmulțirea matricelor este asociativă. Avem deci un grup. ● 14. Elementele produsului $M(\theta, \varphi) M(\theta_1, \varphi_1)$ sînt în ordine

$$\begin{aligned} & \cos(\theta + \theta_1)e^{i(\varphi + \varphi_1)} + 2i e^{i\varphi} \sin \theta \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \\ & \sin(\theta + \theta_1)e^{i(\varphi + \varphi_1)} - 2i e^{i\varphi} \sin \theta \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \\ & -\sin(\theta + \theta_1)e^{-i(\varphi + \varphi_1)} - 2i e^{-i\varphi} \sin \theta \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \\ & \cos(\theta + \theta_1)e^{-i(\varphi + \varphi_1)} - 2i e^{-i\varphi} \sin \theta \sin \theta_1 \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

deci produsul în general nu face parte din mulțimea matricelor date, care astfel nu determină un grup. Mulțimea

$$\mathbf{M}(\theta, 0) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

formează un grup față de înmulțirea matricelor. Elementul unitate este matricea unitate. Matricele fiind nesingulare, au inversele

$$\mathbf{M}^{-1}(\theta, 0) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

● 15. Operația este peste tot definită, căci din

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & a' & b' \\ 0 & 1 & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rezultă

$$\mathbf{XY} = \begin{bmatrix} 1 & a + a' & b' + ac' + b \\ 0 & 1 & c + c' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

și dacă $ac' \neq 0$, operația nu este comutativă. Subgrupurile comutative sînt formate de matrice de următoarele forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Al treilea subgrup, notat cu $M(3, \mathbf{R})$ este izomorf cu $(\mathbf{R}, +)$. Izomorfismul este definit în felul următor

$$\varphi: \mathbf{R} \rightarrow M(3, \mathbf{R}); \varphi(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

● 16. Operația este $(f_1 * f_2)(x) = f_1[f_2(x)]$. Din

$$f_1(x) = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}, \quad f_2(x) = \frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2}$$

deducem

$$(f_1 * f_2) = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)x + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + c_2 d_1)x + c_1 b_2 + d_1 d_2}$$

și

$(a_1 a_2 + b_1 c_2)(c_1 b_2 + d_1 d_2) - (a_1 b_2 + b_1 d_2)(c_1 a_2 + c_2 d_1) = a_1 a_2 d_1 d_2 + b_1 c_2 c_1 b_2 - a_1 b_2 c_2 d_1 - b_1 d_2 c_1 a_2 = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) = 1$, deci operația este peste tot definită. Pentru ca $f_2(x)$ să fie elementul neutru, trebuie să avem

$$\begin{cases} a_1 a_2 + b_1 c_2 = a_1 \\ a_1 b_2 + b_1 d_2 = b_1 \\ c_1 a_2 + c_2 d_1 = c_1 \\ c_1 b_2 + d_1 d_2 = d_1 \end{cases}$$

de unde $a_2 = d_2 = 1$, $b_2 = c_2 = 0$, deci elementul neutru este $f_2(x) = x$.

Pentru ca $f_2(x)$ să fie elementul simetric al lui $f_1(x)$, trebuie să avem

$$\begin{cases} a_1 a_2 + b_1 c_2 = 1 \\ a_1 b_2 + b_1 d_2 = 0 \\ c_1 a_2 + c_2 d_1 = 0 \\ c_1 b_2 + d_1 d_2 = 1 \end{cases}$$

deducem

$$f_2(x) = \frac{d_1 x - b_1}{-c_1 x + a_1}$$

Cum operația de compunere a funcțiilor este asociativă, rezultă că ea determină pe mulțimea dată o structură de grup. ● 17. Avem deci

$$[f_i * f_j] = f_i[f_j(x)]$$

cu proprietatea de asociativitate. Rezultă următoarea tabelă de compunere

*	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

Elementul unitate este f_1 , iar inversele elementelor f_1, f_2, f_3 sînt respectiv egale cu f_1, f_3 și f_2 . Avem

$$f_1^n = f_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f_2^1 = f_2, \quad f_2^2 = f_3, \quad f_2^3 = f_1, \quad f_2^4 = f_2, \dots$$

$$f_3^1 = f_3, \quad f_3^2 = f_2, \quad f_3^3 = f_1, \quad f_3^4 = f_3, \dots$$

deci

$$f^n = f_1 \begin{cases} f_1, f_2, f_3 & \text{pentru } n = 3k \\ f_1 & \text{,, } n = 3k + 1 \\ f_1 & \text{,, } n = 3k + 2 \end{cases}$$

$$f^n = f_2 \begin{cases} f_2 & \text{pentru } n = 3k + 1 \\ f_3 & \text{,, } n = 3k + 2 \\ \text{nu avem soluții} & \text{pentru } n = 3k \end{cases}$$

$$f^n = f_3 \begin{cases} f_3 & \text{pentru } n = 3k + 1 \\ f_2 & \text{,, } n = 3k + 2 \\ \text{nu avem soluții} & \text{pentru } n = 3k \end{cases}$$

● 18. Legea este asociativă și prin compunerea a două numere obținem pe cel mai mare dintre ele, căci dacă $a \geq b$, avem $|a - b| = a - b$, deci $a * b = a$, iar dacă $a < b$, rezultă $|a - b| = b - a$ și $a * b = b$. Rezultă că $a * b * c$ este egal cu cel mai mare dintre cele trei numere. De aici rezultă și comutativitatea operației. În ce privește elementul neutru, dacă se consideră numai elemente nenegative, atunci acesta este zero, cel mai mic dintre numerele mulțimii. Dacă elementele sînt numere reale, nu avem element neutru. Nu avem simetrice pentru elementele mulțimii, nici chiar în primul caz, căci notînd cu s_a simetricul lui a , ar trebui să avem $\frac{a + s_a + |a - s_a|}{2} = 0$, ceea ce nu se

poate decît dacă $a = s_a = 0$, întrucît în partea întîia se adună cantități pozitive. Structura este un semigrup. ● 19. Operația trebuie să fie asociativă, deci $(a, b) * (a', b') * (a'', b'') = \{aa'a'', b''\varphi[b'\varphi(b)]\} = \{aa'a'', b''\varphi(b')\varphi(b)\}$, deci trebuie să avem $\varphi[b'\varphi(b)] = \varphi(b')\varphi(b)$, pentru orice b și b' . Luînd $b' = 1$ și notînd $\varphi(1) = k$, avem $\varphi(\varphi(b)) = k\varphi(b)$, deci $\varphi(x) = kx$. Legea este deci $(a, b) * (a', b') = (aa', kbb')$ și ea este comutativă. Notînd cu (x, y) elementul neutru, trebuie să avem $(a, b) (x, y) = (ax, kby) = (a, b)$ deci $x = 1$ și $y = \frac{1}{k}$, așa că ele-

mentul neutru este $\left(1, \frac{1}{k}\right)$. Elementul simetric al lui (a, b) este $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{kb}\right)$. Avem subgrupurile $X = (1, b)$, $Y = (a, 1)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ și $ab \neq 0$.

● 20. Cum

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 \\ b' & c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ a'b + b'c & cc' \end{bmatrix}$$

operația este peste tot definită. Ea nu este în general comutativă deoarece $a'b + b'c \neq ab' + bc'$. Operația este asociativă (înmulțirea matricelor). Notînd elementul neutru cu $\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix}$, trebuie să avem

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$$

și acesta este $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Elemente opuse

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \text{ și } \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \end{bmatrix}.$$

Subgrupurile comutative sînt formate de mulțimile de matrice

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

● 21. Presupunem că legea de compunere este $\mathbf{M}(x, y) * \mathbf{M}(x_1, y_1) = \mathbf{M}(x, y) \mathbf{M}(x_1, y_1) + \mathbf{X}$ unde matricea $\mathbf{X}$ trebuie determinată. Găsim $\mathbf{M}(x, y) * \mathbf{M}(x_1, y_1) = \mathbf{A}(x) \mathbf{A}(x_1) + y \mathbf{B} \mathbf{A}(x_1) + y_1 \mathbf{A}(x) \mathbf{B} + yy_1 \mathbf{B}^2 + \mathbf{X}$. Cum $\mathbf{A}(x) \mathbf{A}(x_1) = \mathbf{A}(x + x_1)$, $\mathbf{B}^2 = 0$, $\mathbf{B} \mathbf{A}(x) = e^x \mathbf{B}$, $\mathbf{A}(x) \mathbf{B} = e^{-x} \mathbf{B}$, deducem că $\mathbf{X} = -[(e^{x_1} - 1)y + (e^{-x} - 1)y_1] \mathbf{B}$ deci legea este $\mathbf{M}(x, y) * \mathbf{M}(x_1, y_1) = \mathbf{M}(x, y) \mathbf{M}(x_1, y_1) - [(e^{x_1} - 1)y + (e^{-x} - 1)y_1] \mathbf{B}$ care se mai poate scrie $\mathbf{M}(x, y) * \mathbf{M}(x_1, y_1) = \mathbf{A}(x + x_1) + (y + y_1) \mathbf{B}$, de unde rezultă proprietatea de asociativitate și comutativitate. Pentru a găsi elementul unitate $\mathbf{M}(x_1, y_1)$, trebuie să avem $\mathbf{A}(x + x_1) + (y + y_1) \mathbf{B} = \mathbf{A}(x) + y \mathbf{B}$. Rezultă că elementul uni-

tate este $M(0,0)$. Se află apoi ușor că elementul invers al lui $M(x,y)$ este $M(-x, -y)$. ● 22. Operația este peste tot definită, asociativă și comutativă. Elementul neutru are cele trei componente egale cu unitatea. Nu există simetric al elementului X decât dacă $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_3 \neq 0$, caz în care operația definește pe $\mathfrak{M}$ un grup. Dacă este așa, această operație împreună cu operația de adunare a matricelor determină pe $\mathfrak{M}$ o structură de inel comutativ cu element unitate. Există divizori ai lui zero, ca de exemplu

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

● 23. Operația nu determină un grup. Ea nu este asociativă și nu are un element neutru. ● 24. Opera-

ția este asociativă, nu este comutativă, elementul neutru este I . Perechile de elemente simetrice sînt $(R_1, R_2), (S_1, S_1), (S_2, S_2), (S_3, S_3)$. Din relația $R_1 * S_1 = S_1 * R_2$, nu se poate obține concluzia că ar trebui să avem $R_1 = R_2$, căci operația nu este comutativă. Mulțimea $\{I, R_1, R_2\}$ formează un grup comutativ, iar mulțimea $\{I, S_1, S_2, S_3\}$ nu este structură, căci nu este închisă față de operație ● 25. Elementelor A, B, C , pot să le corespundă una din cele 6 permutări, deci avem

*	I	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
I	I	R_1	R_2	S_1	S_2	S_3
R_1	R_1	R_2	I	S_3	S_1	S_2
R_2	R_2	I	R_1	S_2	S_3	S_1
S_1	S_1	S_2	S_3	I	R_1	R_2
S_2	S_2	S_3	S_1	R_2	I	R_1
S_3	S_3	S_1	S_2	R_1	R_2	I

$$\begin{aligned} f_1(A) &= A, & f_1(B) &= B, & f_1(C) &= C \\ f_2(A) &= B, & f_2(B) &= C, & f_2(C) &= A \\ f_3(A) &= C, & f_3(B) &= A, & f_3(C) &= B \\ f_4(A) &= A, & f_4(B) &= C, & f_4(C) &= B \\ f_5(A) &= B, & f_5(B) &= A, & f_5(C) &= C \\ f_6(A) &= C, & f_6(B) &= B, & f_6(C) &= A \end{aligned}$$

Tabela operației este

*	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_5	f_6	f_4
f_3	f_3	f_1	f_2	f_6	f_4	f_5
f_4	f_4	f_6	f_5	f_1	f_3	f_2
f_5	f_5	f_4	f_6	f_2	f_1	f_3
f_6	f_6	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1

Din tabelă se vede că operația nu este comutativă. Operația este asociativă, căci aceasta este proprietatea funcțiilor compuse. Elementul unitate este f_1 ; f_1, f_4, f_5 și f_6 sînt propriile lor simetrice, f_2 și f_3 sînt simetrice. Structura $(M, *)$ este un grup. Se observă din tabela de operație că mulțimea (f_1, f_2, f_3) formează un subgrup comutativ al grupului dat. El este izomorf cu grupul claselor de resturi modulo 3, cu funcția g dată prin $g(\hat{0}) = f_1, g(\hat{1}) = f_2$ și $g(\hat{2}) = f_3$. ● 26. Mulțimea M_5 a claselor de resturi modulo 5, față de adunare, formează un grup abelian, cu elementul unitate $\hat{0}$. Perechile de elemente simetrice sînt $(\hat{1}, \hat{4}), (\hat{2}, \hat{3})$ și $(\hat{0}, \hat{0})$. Față de înmulțire $\{M_5 \setminus \hat{0}\}$ este de asemenea un grup abelian, cu elementul unitate $\hat{1}$ și perechile de elemente simetrice $(\hat{1}, \hat{1}), (\hat{2}, \hat{3}), (\hat{4}, \hat{4})$. Deci structura $(M, +, \times)$ este un corp comutativ. Izomorfismul cu mulțimea rădăcinilor de ordinul 5 ale unității se constată comparînd tabelele de compunere. ● 27. Mulțimea M_6 a claselor de resturi modulo 6, față de adunare este un grup abelian. Elementul unitate este $\hat{6}$, iar perechile de elemente simetrice sînt $(\hat{1}, \hat{5}), (\hat{2}, \hat{4}), (\hat{3}, \hat{3})$. În mulțimea $\{M_6 \setminus \hat{6}\}$, înmulțirea este asociativă și comutativă. Elementul unitate este clasa $\hat{1}$. Divizorii lui zero sînt $\hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$. Rezultă că $(M_6, +, \times)$ este un inel cu element unitate. ● 28. Operația $\perp$ este distributivă față de operația $*$, căci $a \perp (b * c) = a \perp d = n, (a \perp b) * (a \perp c) = n * n = n$. Ea este comutativă căci $\forall a, b \in G,$

$a \perp b = n$, deci și $b \perp a = n$. Operația $\perp$ este asociativă, căci $a \perp \perp(b \perp c) = a \perp n = n$ și $(a \perp b) \perp c = n \perp c = n$. Dacă x ar fi elementul unitate față de operația $\perp$, ar trebui să avem $(\forall a \in G), a \perp x = a$, ceea ce nu se poate. Orice element din G este divizor al lui zero. Subinelele lui $(G, *, \perp)$ sînt toate subgrupurile lui $(G, *)$. ● 29. Se știe că suma și produsul a două matrice triunghiulare sus este tot o matrice de aceeași formă. Față de adunare mulțimea $\mathfrak{M}$ formează un grup comutativ cu elementul neutru matricea nulă de ordinul n . Înmulțirea matricelor din $\mathfrak{M}$ este asociativă, ca înmulțirea tuturor matricelor (dacă operația se poate efectua). De asemenea, înmulțirea este distributivă față de adunare. Matricea unitate este elementul neutru, față de înmulțire. Față de înmulțire nu avem în general element simetric (invers), decît dacă matricea este nesingulară. Prin urmare, mulțimea $\mathfrak{M}$ este un inel cu element unitate față de adunarea și înmulțirea matricelor. ● 30. Față de adunare, mulțimea matricelor $\mathbf{X}$ formează un grup comutativ cu elementul neutru, matricea nulă și elementul simetric al lui $\mathbf{X}$,

$$\begin{bmatrix} -a + b + c & -b & -c \\ -c & -a + b + c & -b \\ -b & -c & -a + b + c \end{bmatrix}.$$

Față de înmulțire, produsul $\mathbf{X}(a, b, c) \mathbf{X}(a', b', c')$ este de aceeași formă, elementele de pe prima linie fiind în ordine $(a - b - c)(a' - b' - c') + bc' + cb'$; $(a - b - c)b' + b(a' - b' - c') + cc'$; $(a - b - c)c' + bb' + c(a' - b' - c')$. Înmulțirea este asociativă. Elementul neutru este matricea unitate de ordinul trei. Nu există în general simetricul unei matrice triunghiulare, decît dacă aceasta este nesingulară. Avem prin urmare un inel cu element unitate. ● 31. Prima lege conferă mulțimii o structură de grup comutativ. Elementul neutru este $(0, 0)$, iar opusul lui (a, b) este $(-a, -b)$. A doua lege este comutativă și asociativă și are elementul neutru $(1, 0)$. Pentru ca elementul (a', b') să fie simetricul lui (a, b) , trebuie ca $aa' + 2bb' = 1$, $ab' + a'b = 0$. Ori soluția acestui sistem nu este formată în general cu numere întregi, deci nu există totdeauna un simetric al lui (a, b) . Cum a doua operație este distributivă față de prima, avem un inel comutativ cu element unitate. ● 32. 1°. $a = -b\sqrt{2}$, cu a și b numere întregi, nu se poate decît dacă $a = b = 0$. 2°. Față de adunare mulțimea este un grup comutativ. Înmulțirea este asociativă și comutativă, iar elementul neutru este 1. Nu avem divizori ai lui zero, căci dacă $a + b\sqrt{2} \neq 0$, ar trebui să avem $(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 0$ de unde $x = y$, căci $a^2 - 2b^2 \neq 0$ deoarece altfel ar trebui să avem $a = \pm b\sqrt{2}$, ceea ce

nu se poate cu $a, b \in \mathbb{Z}$. În ce privește elementul simetric $x + y\sqrt{2}$ ($x, y \in \mathbb{Z}$) al lui $a + b\sqrt{2} \neq 0$, trebuie să avem

$$x = \frac{a}{a^2 - 2b^2}; \quad y = -\frac{b}{a^2 - 2b^2}.$$

Dacă a și b sînt primi între ei, cum x și y trebuie să fie întregi, nu se poate decît ca $a^2 - 2b^2 = \pm 1$. Dacă $a = da_1$, $b = db_1$, avem

$$x = \frac{a_1}{d(a_1^2 - 2b_1^2)}, \quad y = \frac{b_1}{d(a_1^2 - 2b_1^2)}$$

și d trebuie să dividă atît pe a_1 , cît și pe b_1 , deci $d = \pm 1$ și a, b sînt prime între ele. Asemenea numere pentru care avem $a^2 - 2b^2 = \pm 1$, există, de exemplu $a = 1$, $b = 0$; $a = 3$, $b = 2$; etc. Deci numai pentru anumite elemente ale lui M avem simetrice față de înmulțire. Rezultă că $(M, +, \cdot)$ este un domeniu de integritate. ● 33. $(\mathfrak{M}, \circ)$ este un grup, căci asociativitatea rezultă din asociativitatea adunării numerelor reale, elementul unitate este $e = (0, 0)$, iar elementul simetric lui (a, b) este $(-a, -b)$. $(\mathfrak{M}, \cdot)$ este un grup pentru $x \in \mathfrak{M}$ așa ca $x \neq e = (0, 0)$. În adevăr, asociativitatea se verifică, elementul uni-

tate este $(1, 0)$, iar simetricul lui (a, b) este $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$. În

fine, se verifică proprietatea de distributivitate a operației „ $\cdot$ ” față de „ $\circ$ ”, căci dacă $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$, avem $x \circ (y \cdot z) = (x_1, x_2) \circ (y_1 + z_1, y_2 + z_2) = [x_1(y_1 + z_1) - x_2(y_2 + z_2), x_1(y_2 + z_2) + x_2(y_1 + z_1)]$ și același rezultat se obține din $(x \cdot y) \circ (x \cdot z) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \circ (x_1 z_1 - x_2 z_2, x_1 z_2 + x_2 z_1)$. Cele două operații determină pe $\mathfrak{M}$ un corp. Acesta este tocmai corpul numerelor complexe. ● 34. 1° Cum față de a doua lege de compunere nu avem totdeauna un element simetric, structura este de inel comutativ cu element unitate. 2°. Corpul numerelor reale este izomorf cu substructura determinată de cele două operații pe mulțimea elementelor de forma $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. 3°. Avem $z^n = (x^n, nx^{n-1}y)$. 4°. Ecuația se scrie $(z + u)^2 = u^2 + v = (a^2 + c, 2ab + d)$. Dacă $a^2 + c < 0$, ecuația nu are soluții. Dacă $a^2 + c > 0$ ecuația are două soluții. Dacă $a^2 + c = 0$ și $2ab + d \neq 0$ ecuația nu are soluții. Dacă $a^2 + c = 0$ și $2ab + d = 0$, ecuația admite ca soluție $(-a, y)$, oricare ar fi y .

Aplicații numerice:

- α) $z' = (-1, 1)$; $z'' = (-7, -3)$,
- β) nu are soluții,
- γ) toate perechile $(-4, y)$ sînt soluții.

Index alfabetic

d'Alembert 40
aditiv (notat) 104
algoritm, Euclid 16
—, Gauss 92
amplificare 21
analiză combinatorie 32
aplicație 102
aproximații succesive 63, 99
aranjări 32
—, cu repetiție 34
argument (variabilă) 5, 102
argument (n. complex) 36
automorfism 109
Barstow 66
Bernoulli E.1.118
binom 5
bijecție 102
calcul prescurtat 20
Capelli 93
Cauchy E.1.116
Cebîșev (polinomul) S.4. 65
clasă de echivalență 103
combinări 32
—, cu repetiție 33
complement algebric 74
congruență 103
corespondență, biunivocă 102
corp 111
Cramer 92
cuantificator, existențial 101
—, universal 101
Danzig 97
Descartes 55
descompunere în factori 15
descompunerea fracțiilor 21
determinant 71
—, antisimetric 78
—, caracteristic 93
—, minor 74
—, minor principal 76
—, reciproc 75
—, principal 93
—, simetric 78
—, triunghiular 77
diagramă sagitală 101

divizor 14
—, al lui zero 110
—, comun (cel mai mare) 15, 16
—, prim 15
—, propriu 14
domeniul de definiție 102
domeniu de integritate 110
domeniul valorilor 102
ecuație 5,40
—, algebrică 40
—, binomă 48
—, bipătrată 49
—, de gradul I—IV 43—48
—, exponențială și logaritmică 69
—, reciprocă 49
—, trinomă 48
egalitate 5
element, neutru 105
—, pivot 88
—, regulat 106
—, simetric 106
—, singular 106
endomorfism 109, 112
Euclid 16
Euler 29, E. 1.92
expresie, algebrică 5
—, irațională 5, 25
—, întreagă 5
—, matematică 5
—, rațională 5
—, transcendentă 5, 27, 40
formula, binomului 20, 35
—, lui Euler 29
—, polinomului 35
fracție rațională 5,21
— —, simplă 21
formă, canonică (radicali) 25
—, liniară 19
—, pătratică 19
funcție 102
—, bijectivă 102
—, exponențială 28
—, hiperbolică 28
—, injectivă 102
—, inversă 103

- funcție logaritmică 30
 —, putere 30
 —, scop 97
 —, simetrică elementară 43
 —, simetrică fundamentală 43
 —, surjectivă 102
 Gauss 92, 96
 grup 107
 —, abelian 108
 grupoid 107
 Horner, schema 11, 14
 identitate 5
 —, condiționată 6
 indice 25
 inecuație 6,8,69
 inegalitate 5,6
 inel 109
 —, cu element unitate 110
 —, de integritate 110
 —, integru 110
 injecție 102
 inversiune 33
 izomorfism 108, 111
 înmulțire prescurtată 20
 Jordan 96
 Kronecker 93
 Lagrange 18,20,E.1.91
 Laguerre 11,59
 lege de compoziție 104, 105
 — — —, externă 105
 — — —, internă 105
 liniar, dependență 94
 —, independență 94
 logaritmi 30
 —, naturali 30
 —, zecimali 30
 matrice 80
 —, adjunctă 82
 —, antihermitică 90
 —, antisimetrică 90
 —, coloană 80
 —, cvasidiagonală 82
 —, conjugată 90
 —, cu blocuri 82, 98
 —, diagonală 81
 —, diagonal dominantă 82
 —, extinsă 92
 —, hermitică 90
 —, inversă 86
 —, linie 80
 —, nesingulară 87
 —, nulă 81
 —, ortogonală, 90
 —, permutabile 84
 matrice reciprocă 82
 —, simetrică 90
 —, singulară 87
 —, transpusă 81
 —, triunghiulară 81
 —, unitară 90
 —, unitate 82
 medie E.1.120
 —, aritmetică E.1.120
 —, armonică E.1.120
 —, geometrică E.120
 metoda coeficienților nedeterminați 8
 modul 36
 Moivre 38
 monom 5,6
 multiplicativ (notat) 104, 106
 multiplu 15
 —, comun (cel mai mic) 18
 Newton 35, 43, 63
 număr complex 36
 omomorfism 108 111
 operație binară 104
 parametru 5
 permanență 33
 permutare, impară (de clasă) 33
 —, pară (de clasă) 33
 permutări 32
 —, cu repetiție 34
 polinom 5,7
 —, cu mai multe variabile 19
 —, de interpolare Lagrange 18
 —, identic nul 8, 20
 —, Laguerre 11,59
 —, omogen 19
 produs cartezian 100
 programare, liniară 97
 —, neliniară 97
 progresie, aritmetică 30
 —, geometrică 30
 —, geometrică infinită 31
 proprietate, asociativă 105
 —, antisimetrică 104
 —, comutativă 105
 —, distributivă 106
 —, reflexivă 103
 —, simetrică 103
 —, transitivă 103
 radical 25
 —, aritmetic 25
 —, formă canonică 25
 radicali asemenea 26
 rădăcină (ecuație) 40
 —, primitivă 39
 —, a unității 39

rang (matrice) 88
rație 30
rațional echivalente 88
raționalizarea numitorilor 26
relație, binară 101
—, de echivalență 103
—, de ordine 104
—, funcțională 102
—, inversă 101
—, m -ară 101
Rolle 60
Rouché 93
Sarrus 72
Schwarz E.1.116
Seidel 96
semigrup 107
simplex 97
simplificare 21
sisteme, algebrice 91
—, compatibile 91
—, Cramer 92
—, de ecuații 91
—, de logaritmi 30
—, de reprezentanți 103
—, echivalente 91
—, incompatibile 91

sisteme, liniare 92
—, neliniare 91, 95
—, neomogene 92
—, omogene 92, 93
—, scrise matriceal 98
structură algebrică 107
Sturm 56,60
subcorp 111
subgrup 108
subinel 110
substructură 107
surjecție 102
tabel de operație 104
Taylor 11,13
transformarea unei ecuații 49
transformări, elementare 88
—, rațional echivalente 88
trinom 5
valoare, a funcției 102
—, numerică 7
—, principală 37
Vandermonde 78
variabilă 5
Viète 42
zero 8

$$\frac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \frac{2^{3x} + 3^{3x}}{2^{2x} \cdot 3^x + 2^x \cdot 3^{2x}} = \frac{7}{6}$$

$$1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3x}{x}}$$

$$\frac{2^{3x} + 3^{3x}}{2^{2x} \cdot 3^x + 2^x \cdot 3^{2x}} \div 2^{3x} = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$$

$$\frac{2^{3x}}{2^{3x}} + \frac{3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\frac{2^{2x} \cdot 3^x + 2^x \cdot 3^{2x}}{2^{2x} \cdot 3^x + 2^x \cdot 3^{2x}} \div 2^{3x} = \frac{2^{2x} \cdot 3^x}{2^{2x} \cdot 3^x} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{2^x \cdot 3^{2x}}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$$

$$\frac{\left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{3x}\right)^{2x}}{\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x}$$

80. + 43 C.A.A.
 44 13 Sept
 124. - 56
 40 minutes 100
 84 56
 40

REDACTOR: MONICA CREMENE
 TEHNOREDACTOR: L. HLAVATHY
 APĂRUT: 1977. BUN DE TIPAR: 23. III. 1977
 COMANDA NR.: 1377.

COLI DE TIPAR: 19,5. HÎRTIA: TIPAR ÎNALT A 90 G/M²
 CONTINUARE DE TIRAJ: DE LA 102.400—202.400 EXEMPLARE.

C.Z. PENTRU BIBLIOTECI: 512(075.3).
 TIPARUL EXECUTAT SUB COMANDA NR. 7/1977
 LA ÎNTRERINDERE POLIGRAFICĂ SIBIU
 ȘOS. ALBA IULIA NR. 40
 REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA.



$$\frac{2^{3x} + 3^{3x}}{2^{2x} \cdot 3^x + 2^x \cdot 3^{2x}}$$

$$2^x \cdot 3^x (2^x + 3^x)$$

N. Ghircoiașiu
M. Iașinschi

Algebră

Cartea de față, sub formă de fișe, împărțită în trei părți (teorie, exerciții și soluții) diferențiate prin culori, sintetizează capitolul algebră din matematici. Atât prin forma cit și prin conținutul ei, cartea caută să ușureze munca de pregătire a elevilor pentru examenele de bacalaureat și de admitere în învățământul superior.

În anii viitori, la Editura „DACIA” vor mai apărea și „Fișe de geometrie și trigonometrie pentru elevi și absolvenți de licee”, precum și fișe de fizică, de istorie, de limba română etc.

Atât editura cit și autorii acestei cărți așteaptă sugestii și aprecieri din partea cititorilor, pentru care vă mulțumesc anticipat, și pe care le puteți trimite pe adresele: Editura „Dacia”, str. 1 Mai nr. 23, Cluj-Napoca, N. Ghircoiașiu str. Crișan nr. 2, Cluj-Napoca, M. Iașinschi str. Budai Nagy Antal nr. 38 Cluj-Napoca.



Lei 11,50

N. GHIRCOIAȘIU
M. IĂȘINSCHI

FIȘE
DE

algebră

pentru
elevi și
absolvenți
de
licee

Cartea de față, sub formă de fișe, împărțită în trei părți (teorie, exerciții și soluții) diferențiate prin culori, sintetizează capitolul algebră din matematici. Atât prin forma cit și prin conținutul ei, cartea caută să ușureze munca de pregătire a elevilor pentru examenele de bacalaureat și de admitere în învățământul superior.

În anii viitori, la Editura „DACIA” vor mai apărea și „Fișe de geometrie și trigonometrie pentru elevi și absolvenți de licee”, precum și fișe de fizică, de istorie, de limba română etc.

Atât editura cit și autorii acestor cărți așteaptă sugestii și aprecieri din partea cititorilor, pentru care vă mulțumesc anticipat, și pe care le puteți trimite pe adresele: Editura „Dacia”, str. 1 Mai nr. 23, Cluj-Napoca, N. Ghircoiașiu str. Crișan nr. 2, Cluj-Napoca, M. Iășinski str. Budai Nagy Antal nr. 38 Cluj-Napoca.



11.50

algebră

EDITURA DACIA